Cap 2 (do livro texto)

Tema 4 – Parte 5 - UFF - 2020

Transformações de Bases em C.G.

Tudo é relativo.....

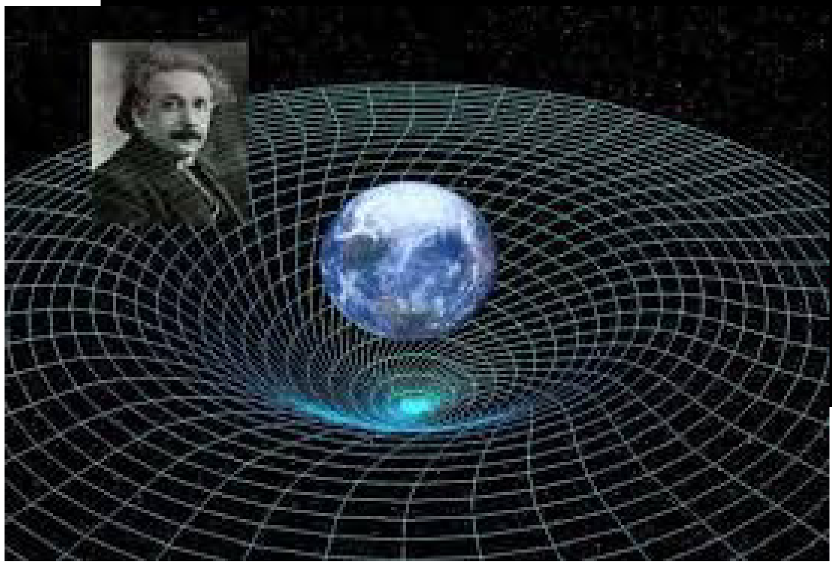
Em 4 meses , entre março e junho, de 1905, um desconhecido, com 25 anos, surpreendeu o mundo ao publicar quatro artigos diferentes:

o 1.º sobre o quantum de luz,

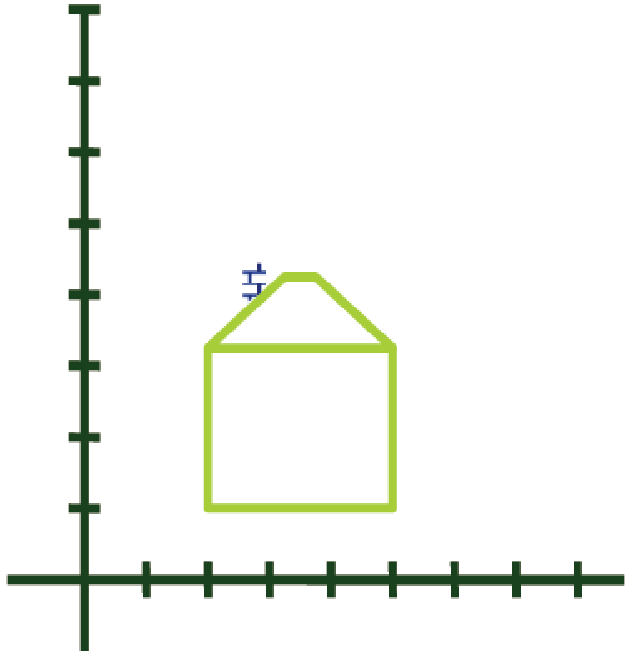
o 2 .º sobre uma nova determinação das dimensões moleculares",

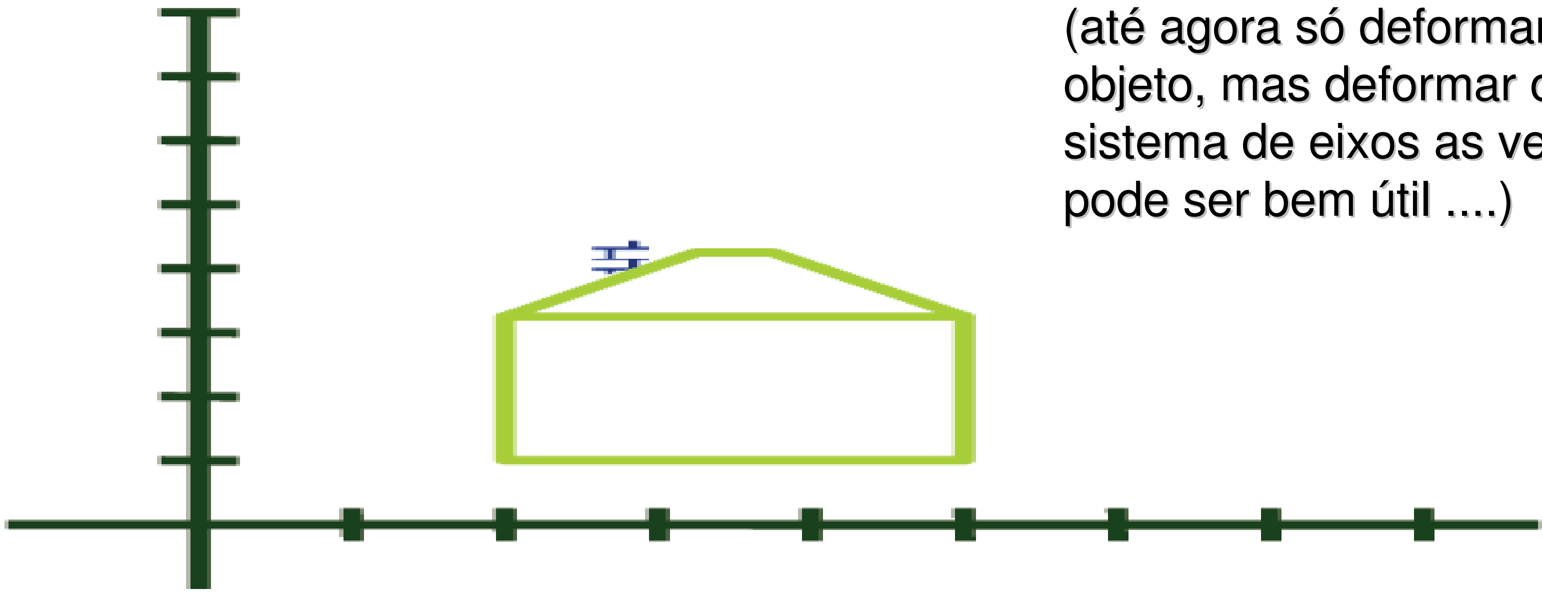
o 3.º sobre o movimento browniano e

o 4.º sobre uma nova teoria física, denominada **Teoria da Relatividade** e, depois chamada , **Teoria da Relatividade Especial**.



mo o
siste
mas
de
eixo
s ou
o
objet
o ?

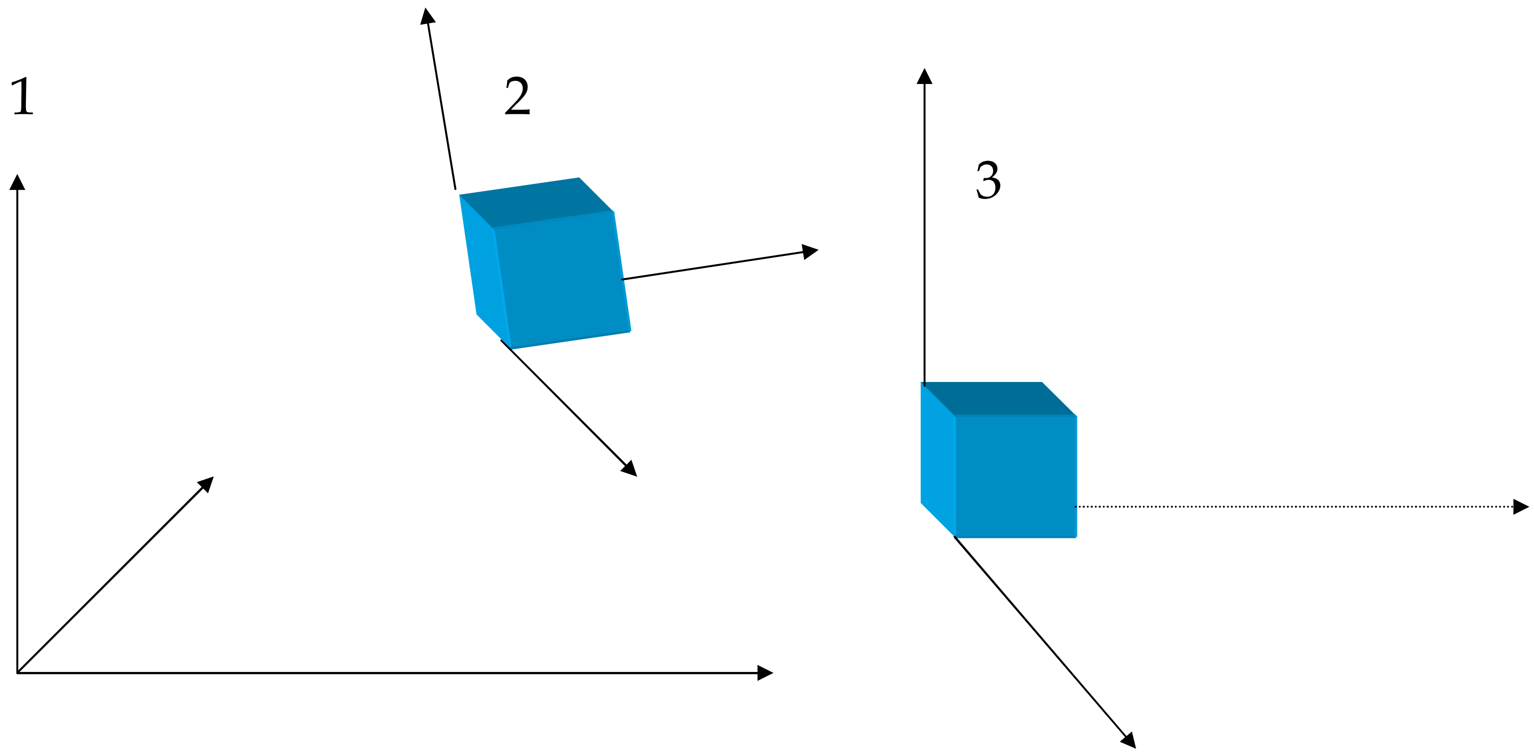




(até agora só deformamos o objeto, mas deformar o sistema de eixos as vezes pode ser bem útil ....)

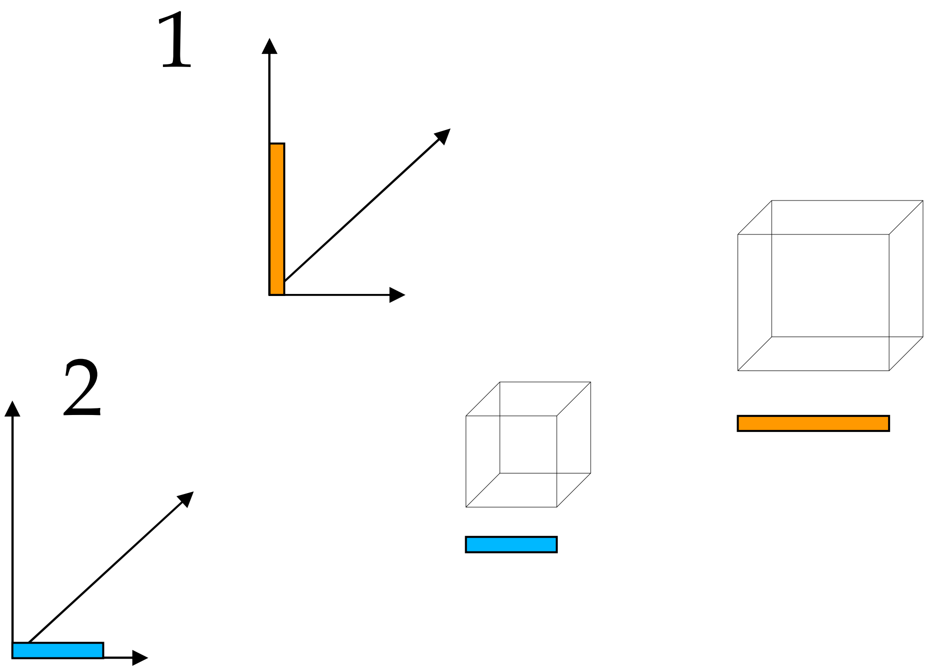
Os movimentos de um único objeto

Deslocamentos de corpo rígido (Translação e Rotação) de um **objeto em relação ao sistema de eixos** podem ser considerados também como deslocamento do próprio **sistema de eixos em relação ao objeto** .



E a alteração

Homogênea de escalas também pode ser vista como uma mudança da unidade usada no sistema de eixos .



Transformações de bases ou dos sistemas de coordenads

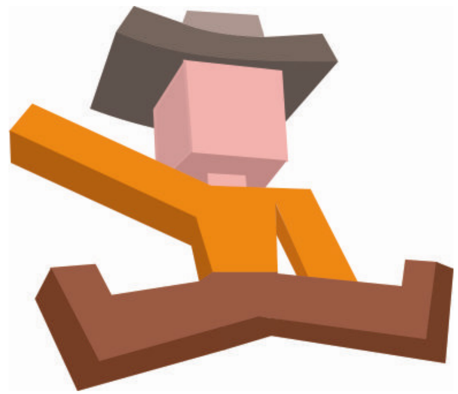
Em algumas condições é importante saber como fazer a transformação entre as bases na qual pode-se estar definindo um objeto, ou os objetos de/em um cenário.

Como a ideia em 3D ou 2D é a mesma e,

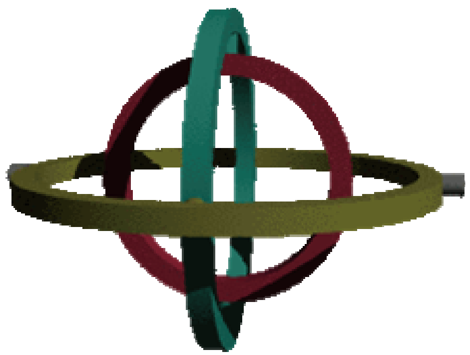
como o ultimo dos nossos sistemas será sempre 2D vamos fazer os exemplos inicialmnete bidimensionais .

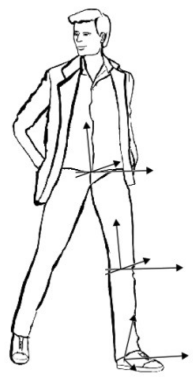
Para Transformar:

1- Diferentes objetos em uma cena ou usar Sistemas de Coordenadas diversos para um mesmo objeto 3D



2- O objeto a partir da transformação de outros objetos, cada um em um sistema de coordenadas





3- Sistemas de Coordenadas diversos para facilitar animações

Bases ortonormais

Uma base é **ortogonal** se os vetores que a compuserem forem mutuamente **ortogonais**.

Uma base é **ortonormal** se os seus vetores além de **ortogonais** tiverem comprimentos unitários.

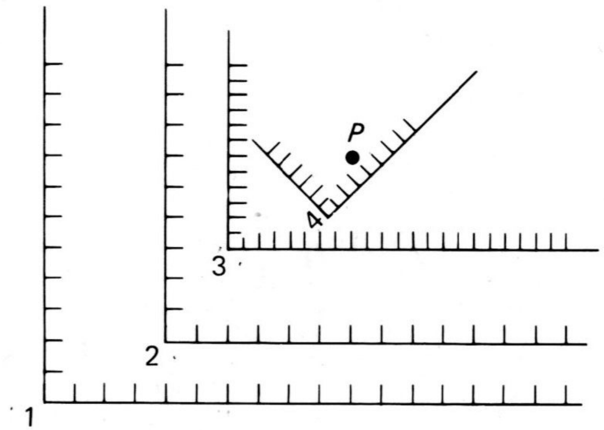
Por exemplo: As 1 e 2 ao lado

são ortonormais se seus vetors de base forem

(1,0) e (0,1)

(em relação a elas próprias e

em relação a base canônica do R^2)



Um mesmo ponto

Tem suas coordenadas em função da base (direção dos sistemas de eixos) usada e de suas unidades.

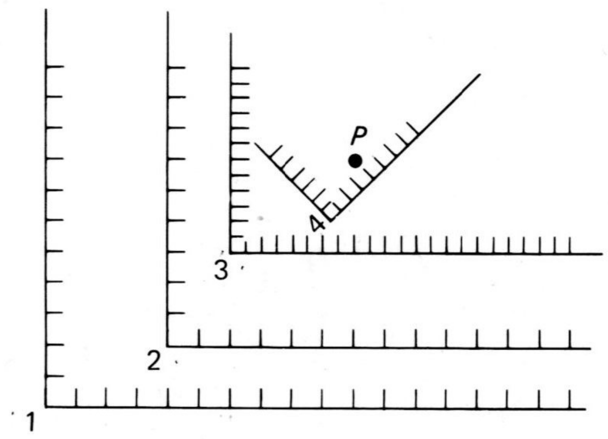
Ou seja as coordenads são algo que só tem sentido de relacionado a uma base bem definida, estabelecida e conhecida!

Pixel e dots são abstrações relacionadas ao dispositivo usado e a estrutura de dados do programa.

O pixels per inch - PPI ou dots por inch - DPI são formas de relacionar sua medida a um padrão fisico linear conhecido (1 inch = 1 polegada 2,54 cm) .

Cada programador é quem decide quantos pontos vai usar para representar uma unidade no sistema de coordenados usado.

Mudança de ba



Dado um ponto em um sistema de eixos como representá-lo em outro sistema qualquer?

$$P = (10,8)^1 = (6,6)^2 = (8,6)^3 = (4,2)^4$$

As ideias de transformações de matrizes e coordenadas homogenas, podem ser muito uteis para as Mudança de base tambem !

Não é preciso ter a mesma unidade em cada eixo do sistema!

Alem disso :

Os eixos podem sofrer qualquer efeito!

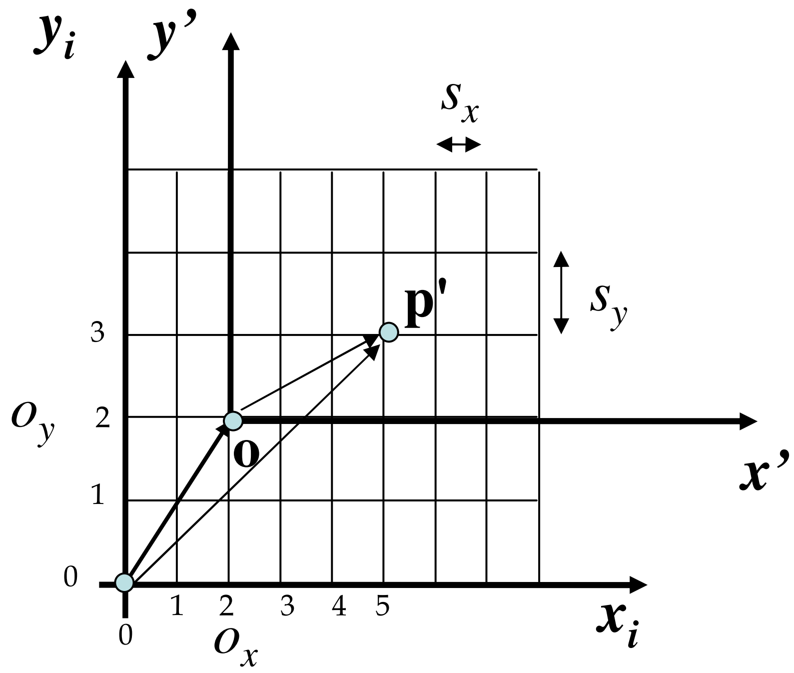
Como se eles mesmo fosse uma imagem!

(Havendo translação entre os centros, pode ser util usar as coordenadas homogenas - CH !)

Transformações de coordenadas

Genericamente não precisa ter uma unidade única nas duas direções!

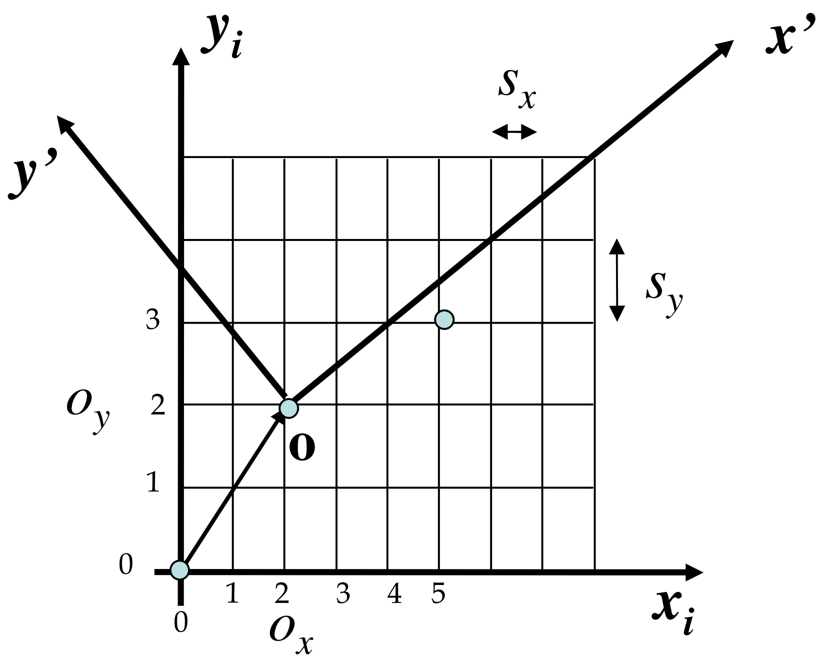
Origem e vetores unitários como referencia é que são importantes



$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x(x_i - o_x) \\ s_y(y_i - o_y) \end{pmatrix}$$

Os eixos podem estar em qualquer ângulo!



Qualquer transformação afim pode

relacionar os sistemas de eixos!

$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Transformações de coordenadas genericamente

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

2D: Coordenadas homogêneas

no R^2 é um elemento do R^3 com uma relação de escala.

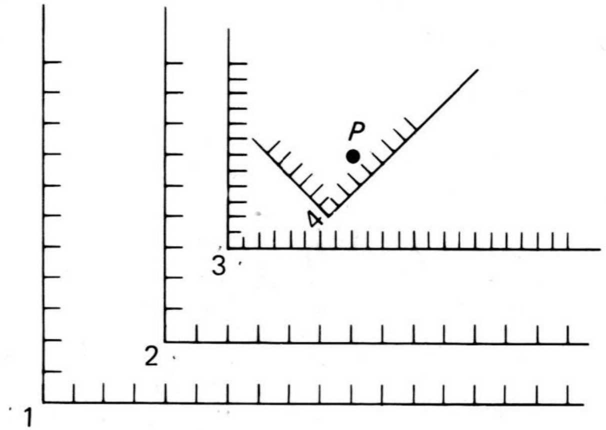
$$P = (x, y, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, 1)$$

- Um ponto do plano é definido como:
  - Chamado $P = [x, y, 1]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).

Matriz de Translação ou Translação em coordenadas homogeneas pode ser usada para as bases

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mudança da base 1 para a 2



$(10,8)^1 = (6,6)^2$

- A base 2 pode ser vista como a base 1, deslocada para a posição (4,2) . Ou a 1 como a 2 deslocada de (-4,-2).

- Assim a **matriz de transição** da base 1 para a 2 é dada por: $M_{1\text{->}2}$

$$\mathbf{P^2 = M_{1\text{->}2} P^1}$$

1	0	-4
0	1	-2
0	0	1

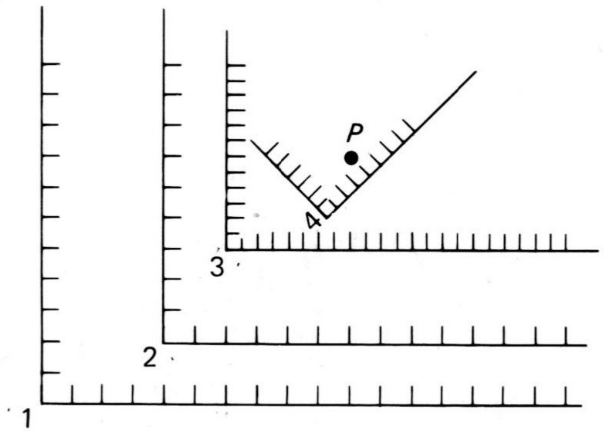
- E sua **inversa** representa a transição da base 2 para a 1: $M_{2\text{->}1}$

$$\mathbf{P^1 = M_{2\text{->}1} P^2}$$

- OU seja um ponto definido na base 1, na base 2 tera menos 4 unidades na horizontal e menos 2 unidades na vertical.
- OU um ponto definido na base 2, na base a tera mais 4 unidades na horizontal e 2 unidades na vertical.

1	0	4
0	1	2
0	0	1

- $\mathbf{M_{1\text{->}2}\, M_{2\text{->}1} = I = M_{2\text{->}1} M_{1\text{->}2} = I^2}$



Mudança da base 2 para a 3

- A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como deslocada para a posição (-4,-6) e depois tento sua unidade de base amplificada por um fator 2

- Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por:

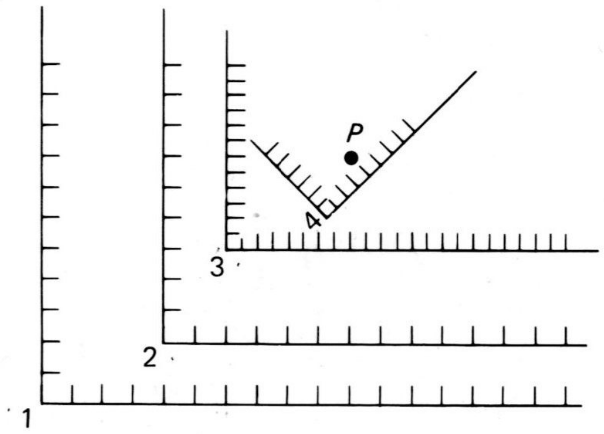
2	0	-4
0	2	-6
0	0	1

- E sua **inversa** representa a **transição da base 2 para a 3**:

0,5	0	2
0	0,5	3
0	0	1

Mudança da base 2 para a 3

$(6,6)^2 = (8,6)^3$



A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como : deslocada para a posição (-4,-6) e depois tento sua unidade de base multiplicada por 2 (importante: essa ordem não é comutativa) !

Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por: $M_{2\to3}$

$$P^3 = M_{2\to3} P^2$$

2	0	-4
0	2	-6
0	0	1

E sua **inversa** representa a **transição da base 3 para a 2**: $M_{3\to2}$

$$P^2 = M_{3\to2} P^3$$

0,5	0	2
0	0,5	3
0	0	1

A base 2 pode ser descrita em função da base 2 como : deslocada para a posição (2,3) e depois tento sua unidade de base multiplicada por ½=0,5 (lembre: essa ordem não é comutativa) !

$$I = M_{3\to2} M_{2\to3} = I = M_{2\to3} M_{3\to2}$$

Combinando matrizes de transição

- Repare que você pode ir da base 3 para a base 2, compondo as matrizes homogêneas :
- de translação
- de mudança de escala.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de transição se combinam como qualquer matriz !

- Repare que você teria o mesmo efeito combinando as matrizes de **translação das origens** e mudança de **escala dos vetores unitários das novas bases**.

- Com mesmo raciocínio você pode ir de 3 para 1 ou de 1 para 3, combinando as que já calculou entre 1 e 2 ou 2 e 1:

$$\mathbf{P^1 = M_{2\text{->}1}\, P^2 = M_{2\text{->}1}\, M_{3\text{->}2}\, P^3}$$

$$\mathbf{P^3 = M_{2\text{->}3}\, P^2 = M_{2\text{->}3}\, M_{1\text{->}2}\, P^1 =} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P^1 =} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P^1}$$

Combinando matrizes de transição

Repare que você pode ir da base 3 para a base 1, compondo as 2 matrizes de transição anteriores da mesma maneira como você combina matrizes em coordenadas homogêneas para transformar os objetos.

Como ficaria $\mathbf{M}_{\mathbf{1\text{->}3}}$ $\mathbf{M}_{\mathbf{3\text{->}1}}$ **?**

Mudança da base 4 para a 3 (e vice versa)

$=(8,6)^3 = (4,2)^4$

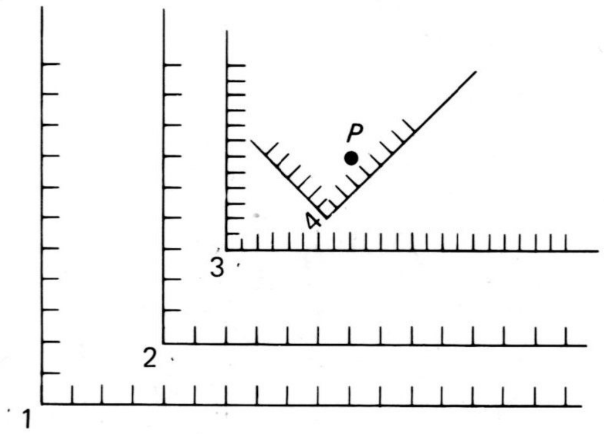
O sistema 4 está no ponto **(6,7 ; 1,8)** do sistema 3 ! E fazendo 45 graus !)

Faça você a ultima etapa para ir do 4 para o 1

e também em sentido oposto

$\mathbf{M_{1\text{->}4}}$ $\mathbf{M_{4\text{->}1}}$

$P = (10,8)^1 = (4,2)^4$



Resumindo:

Sempre se obtém a matriz de transição em CH por:

mudarmos a base ***B*** para uma nova base ***B´,***

As coordenadas na velha base ***v*** se relacionam com as novas ***v´*** pela matriz de transição ***T***:

v* = *T v´ ,

onde as colunas de ***T*** representam os **vetores unitários da nova base** descritos em função dos **vetores unitários da velha base (como se os centros fossem coincidentes)**, e na última coluna (ou linha se for ma forma transposta) descreve-se o **centro da nova base,** em termos da antiga.

Outra forma bem simples é descrever 2 vetores das bases na mesma base canonica!

Por exemplo qual a matriz de transformação **$M_{1\to 2}$** que leva os sistemas de eixos definidos pelos vetores do R^2 (1 , 2) e (-2 , 5) no sistema definido por (1,-1) e (-3,-2) ?

M1= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **M2=** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

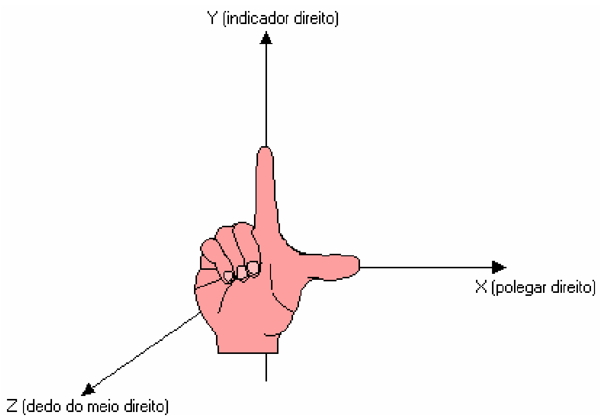
M1 e **M2** Descrevem cada um dos sistemas de eixos na base do R^2 nos vetores

Invertendo-se a matriz do primeiro chego na base do R^2 e nela escrevo os outros vetores por :

$M1^{-1}$ **M2** = 1/9 $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Obs. Inverter uma matriz 2x2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ = 1/(ad-bc) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

na
siste
mas
de
eixos
+ ou -



+ => Ângulos entre si

de acordo com a Regra da mão direita:

Dedão esticado no sentido do eixo (eixo x)

Dedo **indicador** apontando para segundo eixo (eixo y)

Feixe a mão e veja se ela **aponta** no sentido do **terceiro eixo**, se isto acontecer significa que as três direções formam um sistema de eixos positivos

O mesmo visto aqui vale para bases 3D

Mas lembre que para mudar de um sistema positivo (right handed coordinate system) para um negativo (left handed coordinate system)

A matriz de transição em coordenadas do R^3 (normais) é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

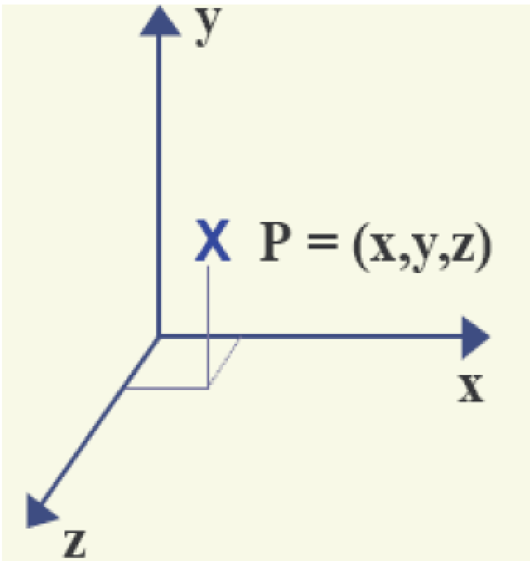
E havendo translação nas bases pode-se usar na matriz de transição as coordenadas homogêneas para facilitar as combinações de matrizes (multiplicações).

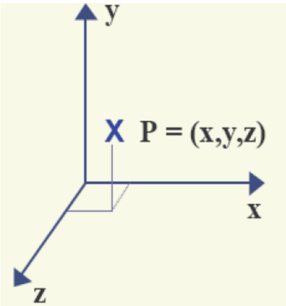
Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

$$P = \{(x, y, z, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1)\}$$

  - Denotado por P = [x,y,z,w] em coordenadas homogêneas.





Coordenadas Homogêneas

- O **sistema de coordenadas homogêneas** (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por **(x', y', z', M).**
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação **(x, y, z) = (x'/M, y'/M, z'/M)**
- Quando M=1 a representação é a mesma do espaço cartesiano.

O mesmo CH vale para bases 3D

E tambem para mudar de um sistema de eixos positivo para um negativo!

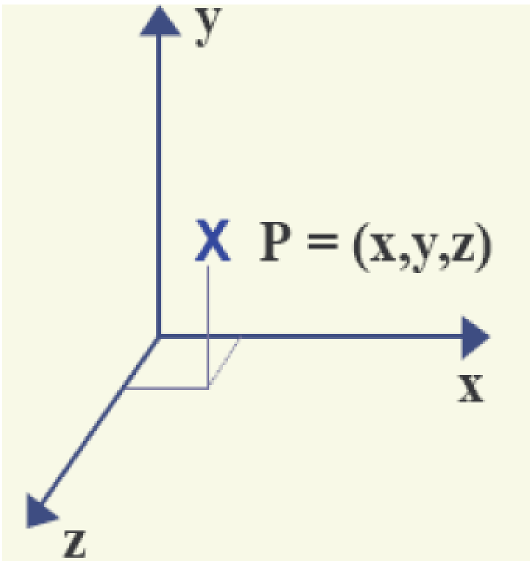
Para mudar de um sistema positivo (right handed coordinate system) para um negativo (left handed coordinate system)

A matriz de transição em coordenadas coordenadas homogêneas fica.

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	-1	0
0	0	0	1

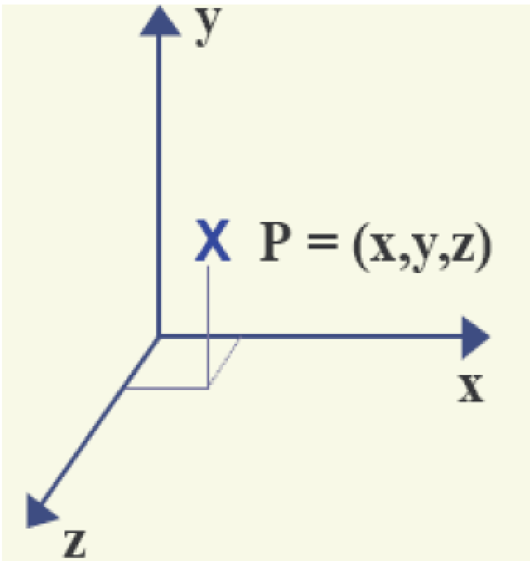
Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



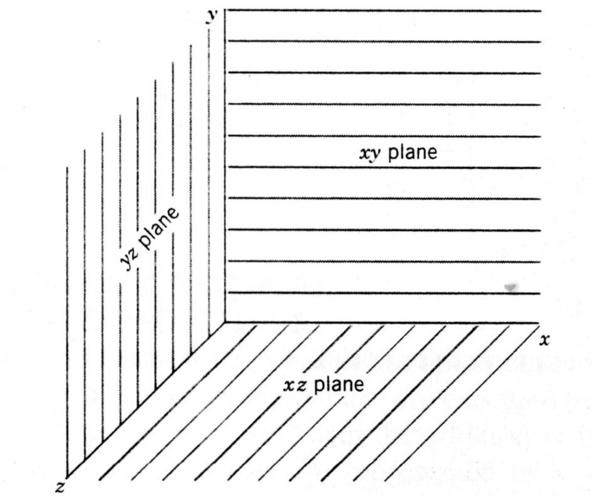
Escala em torno da origem do Espaço 3D

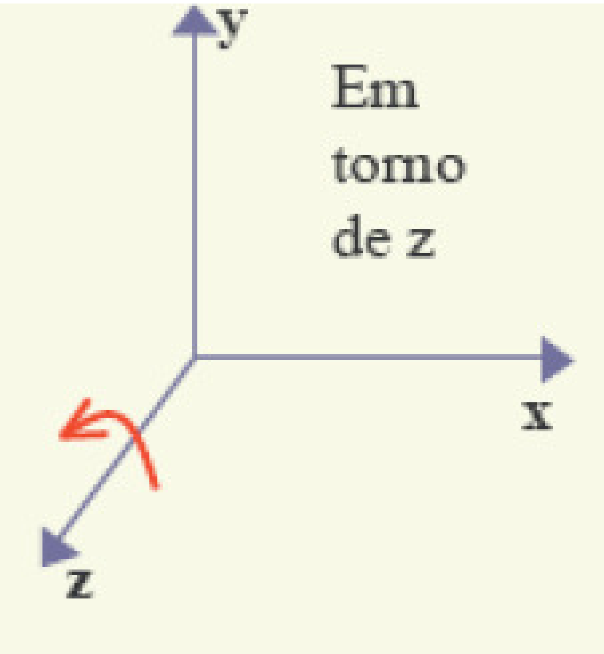
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotações no sistema de eixos Espaço 3D (ângulo de Euler em torno de Z, ou no plano xy)

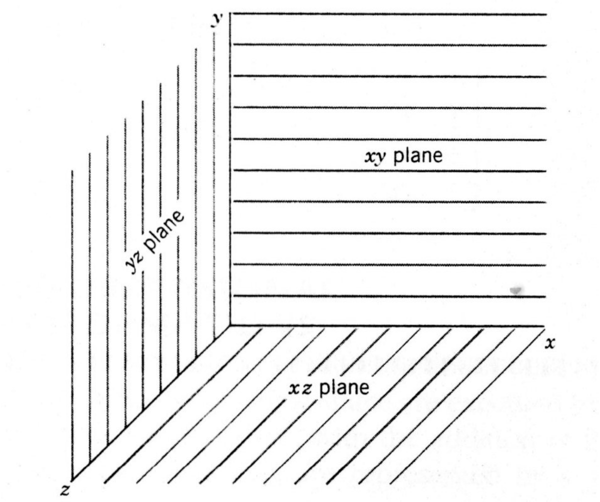
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

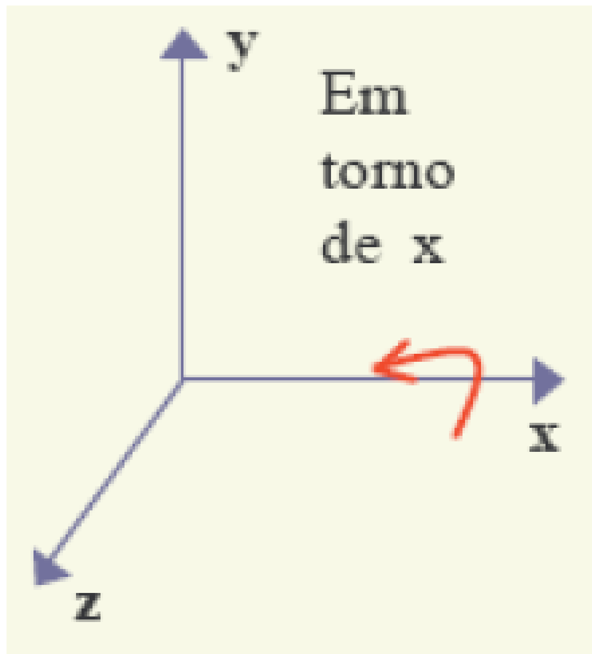




Rotações no sistema de eixos do Espaço 3D (ângulo de Euler em torno de X – plano yz)

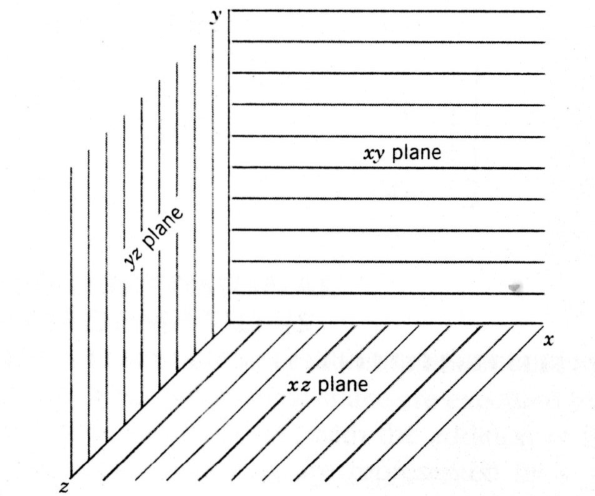
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

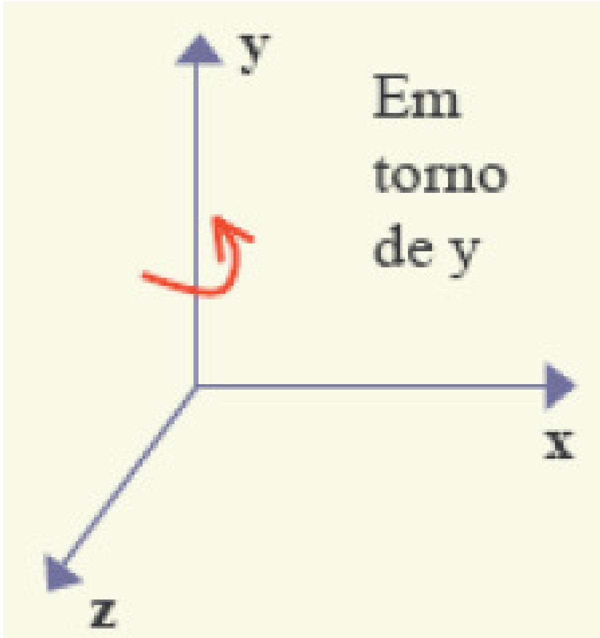




Rotações no sistema de eixos do Espaço 3D (ângulo de Euler em torno de Y – plano zx)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$





E depois de definido cada Transformação

Suas combinações são obtidas pela concatenação das diversas matrizes

Tantas vezes quando nescessario,

Como já estamos fazendo com os objetos....

Referências

E. Azevedo, A. Conci, C. Vasconcelos Computação Gráfica: teoria e prática, Elsevier; 2018 - Rio de Janeiro.

Vera B. Anand, Computer Graphics and Geometric Modeling, John-Wiley,1993. BCTC/UFF - 006.6 A533 1993

E. Azevedo, A. Conci, Computação Gráfica: teoria e prática, Campus ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley,A.van Dam,S.K.Feiner,J.F.Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, Reading, 1990.