



Transformações Geométricas em C.G.

Cap 2 (do livro texto)

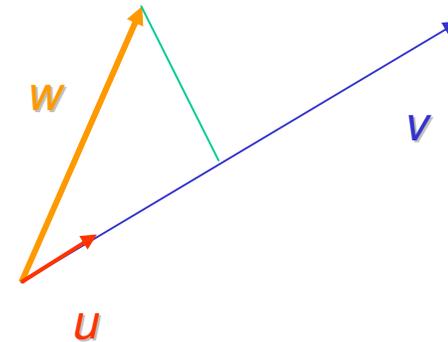
Tema 4 – parte 3 – Transformações 3D
UFF - 2020

Produto interno no \mathbb{R}^n :

(inner product ou dot product)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

$$(u \cdot v) = |u| |v| \cos(\beta)$$



a projeção de um vetor w perpendicularmente em uma dada direção definida por um vetor v é o produto interno de w pelo vetor unitário na direção de v : u

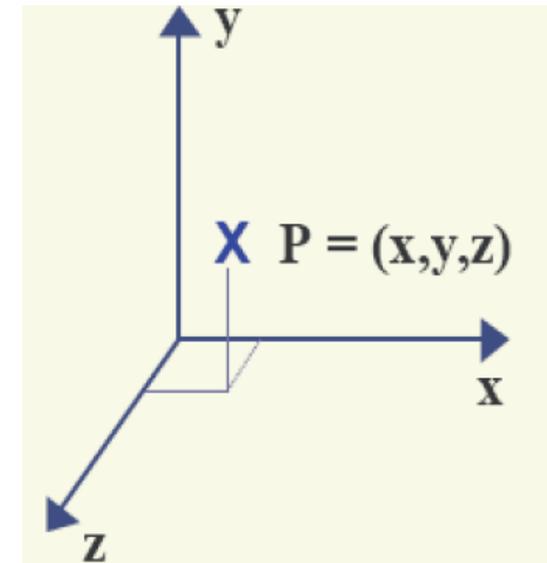
Projete o vetor $(2,3,1)$ na direção de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(1,0,0) - (0,1,0)$.

Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

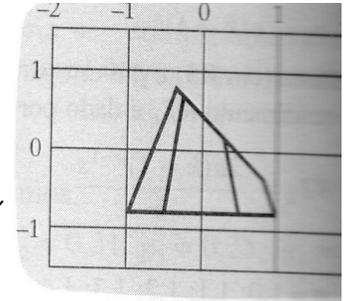
$$P = \{ (x, y, z, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1) \}$$

- ♦ Denotado por $P = [x, y, z, w]$ em coordenadas homogêneas.
- ♦ 1,2 ; 0,4 ; 1,7

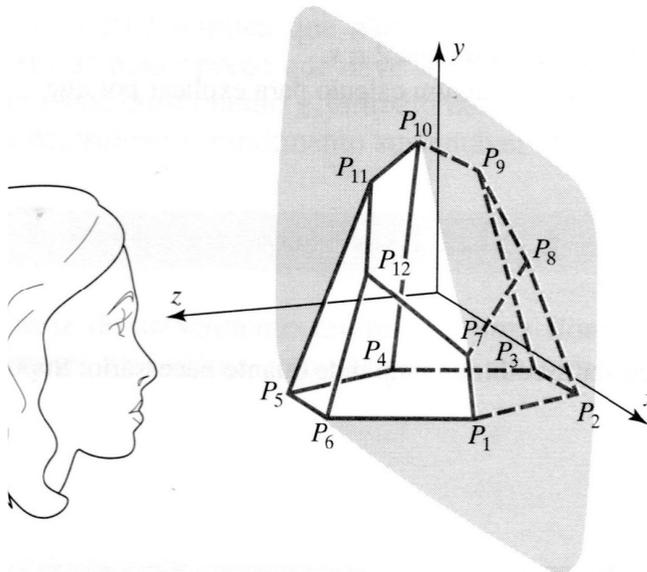
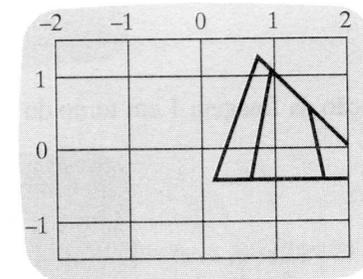


Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



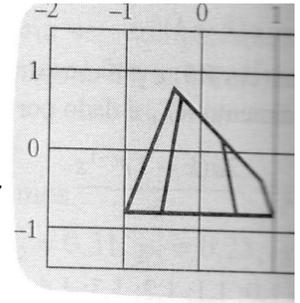
$$d_x=1,2 \ ; \ d_y=0,4 \ ; \ d_z=1,7$$



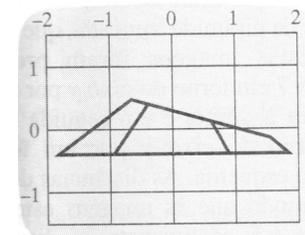
- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| $P_1 : (1,000; -0,800; 0,000),$ | $P_2 : (0,500; -0,800; -0,866),$ |
| $P_3 : (-0,500; -0,800; -0,866),$ | $P_4 : (-1,000; -0,800; 0,000),$ |
| $P_5 : (-0,500; -0,800; 0,866),$ | $P_6 : (0,500; -0,800; 0,866),$ |
| $P_7 : (0,840; -0,400; 0,000),$ | $P_8 : (0,315; 0,125; -0,546),$ |
| $P_9 : (-0,210; 0,650; -0,364),$ | $P_{10} : (-0,360; 0,800; 0,000),$ |
| $P_{11} : (-0,210; 0,650; 0,364),$ | $P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)$ |

Escala em torno da origem do espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$s_x=1,8 \ ; \ s_y=0,5 \ ; \ s_z=3,0$$



Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)

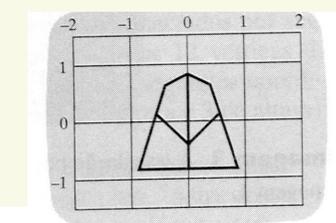
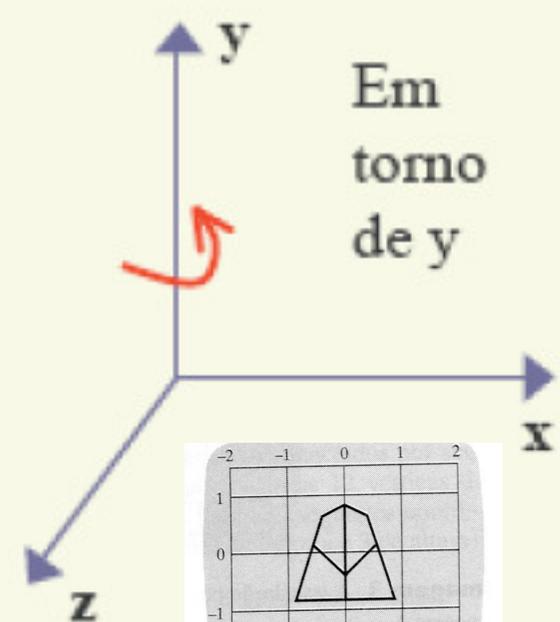
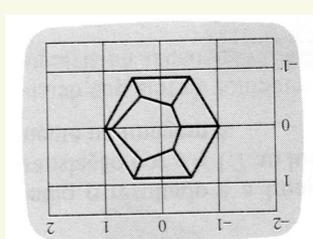
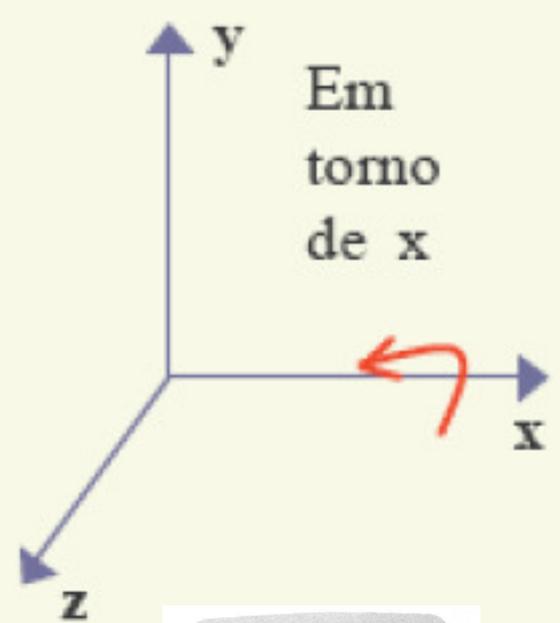
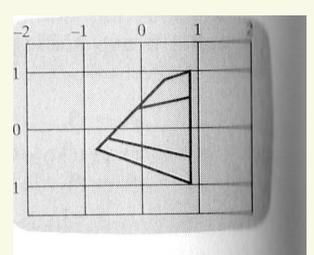
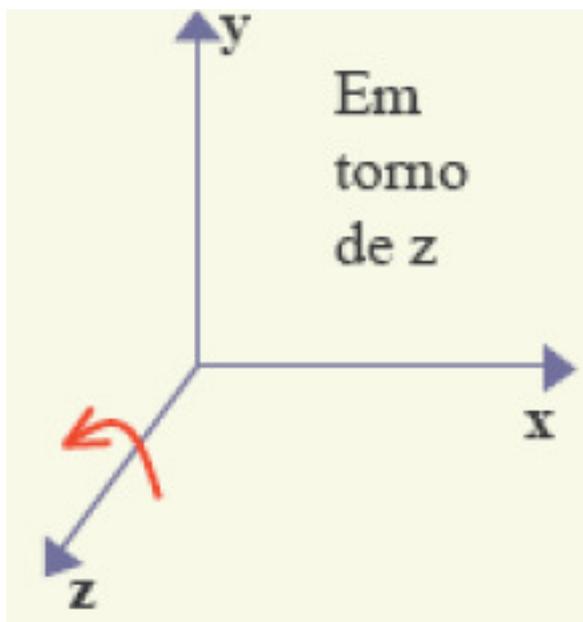
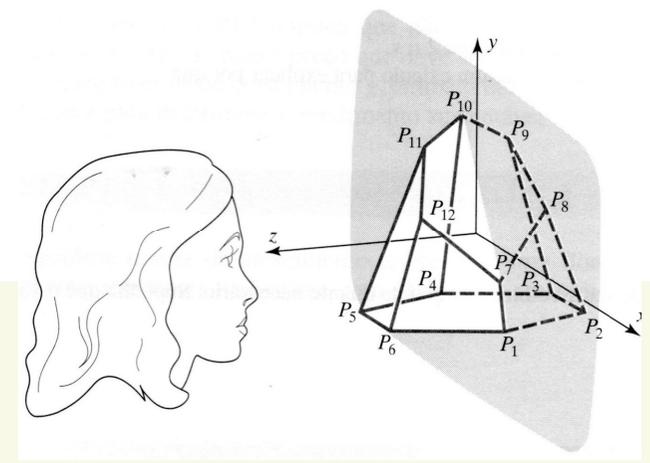


Imagem de cima a por 90°

Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

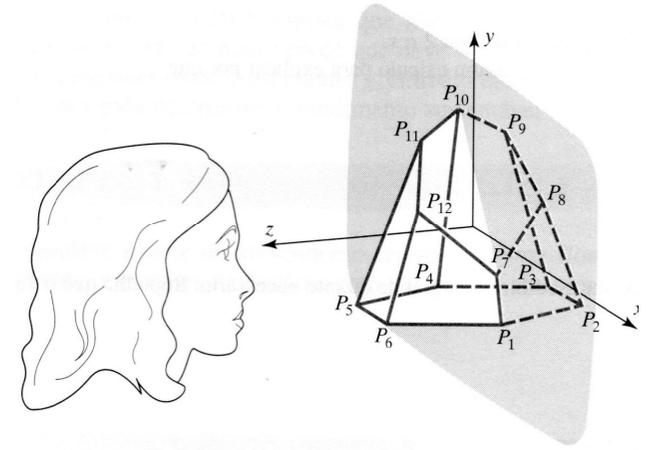
Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

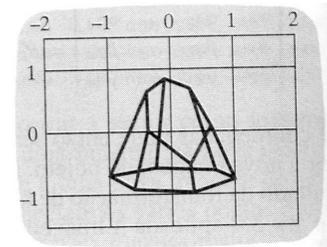
Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno dos 3 eixos



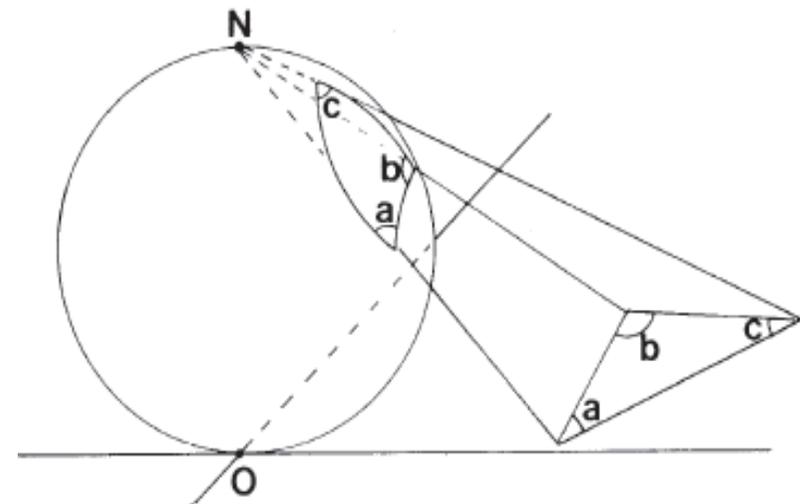
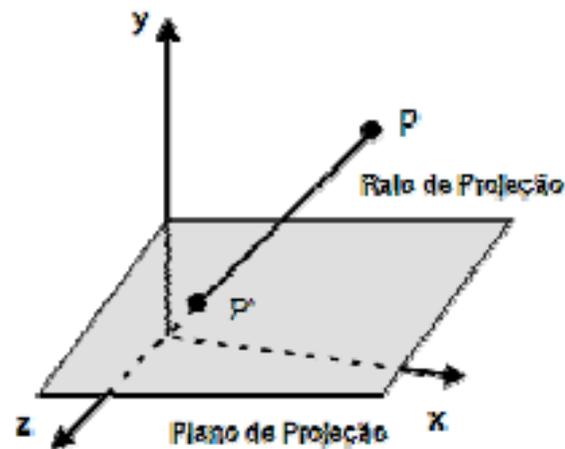
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

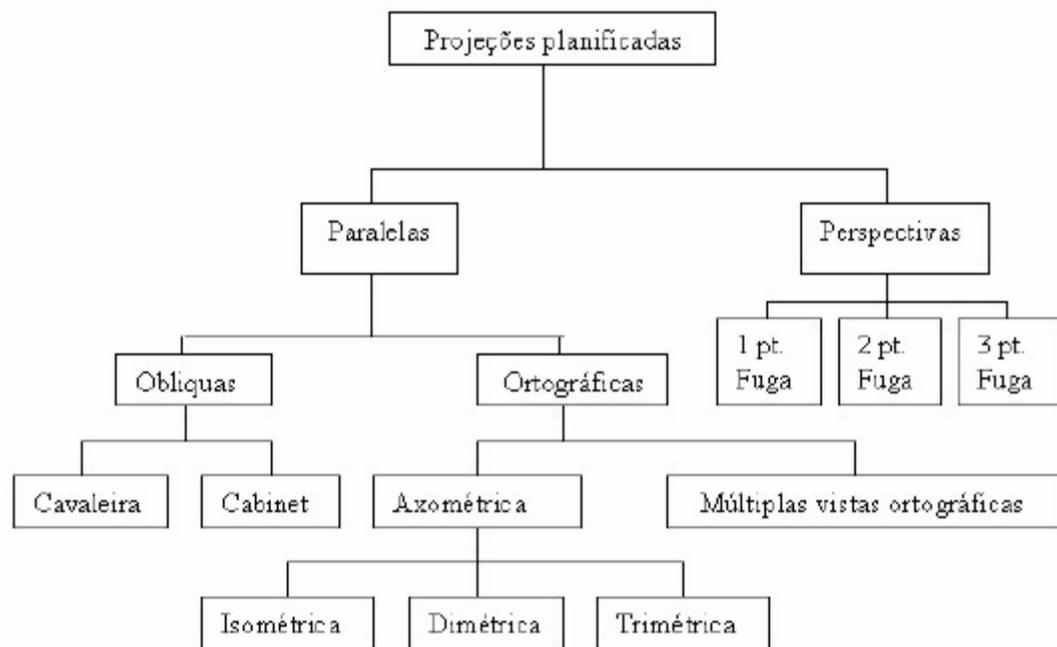


Projeções:

Elementos básicos:

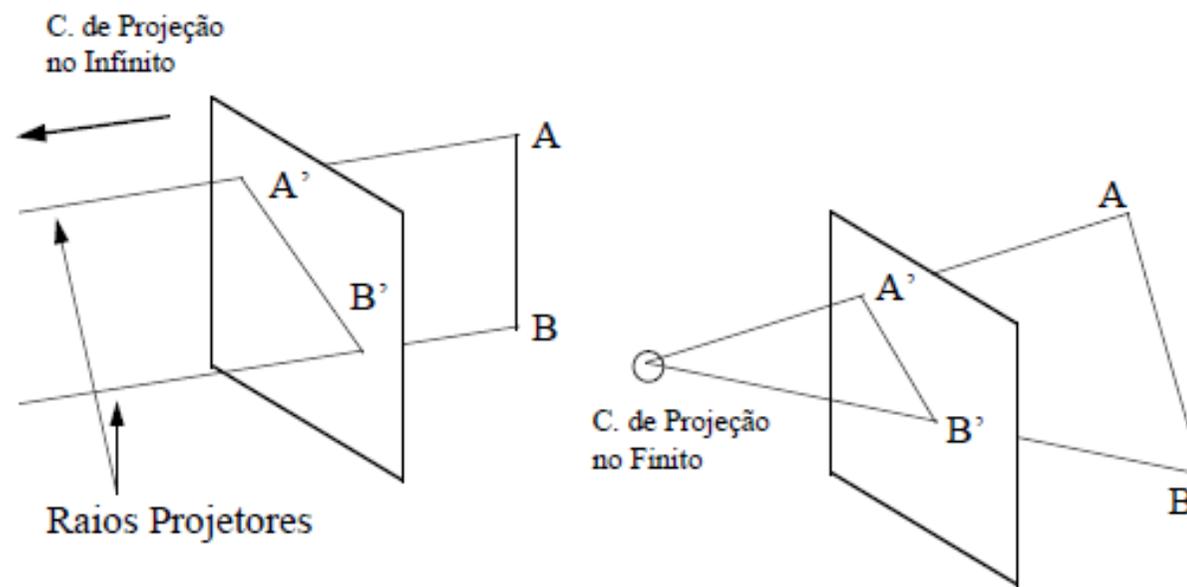
- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.





Classificação:

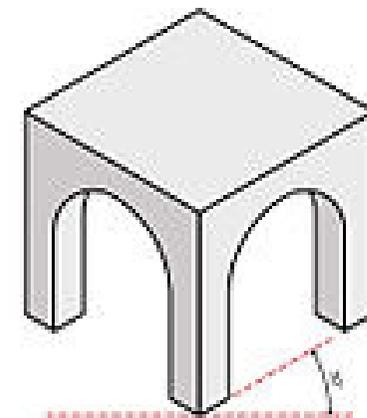
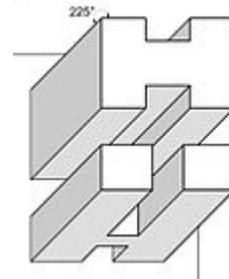
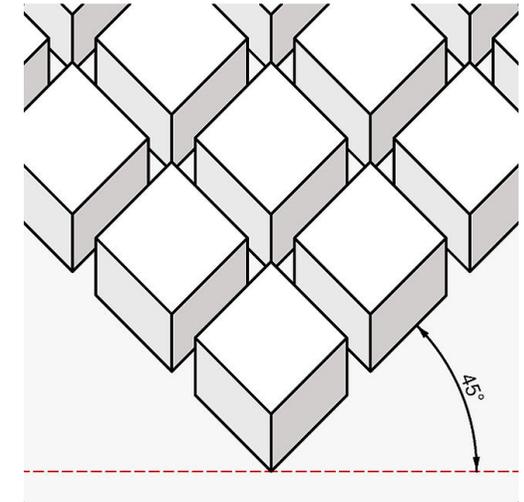
- Projeções paralelas e projeções perspectivas



Características:

- Projeções Paralelas

- O centro de projeção é localizado no infinito
- Todas as linhas de projeção são paralelas entre si;
- São tradicionalmente usadas em engenharia e desenhos técnicos;
- Em alguns casos preservam as dimensões do objeto;
- Não produzem imagem realista.



Perspectiva (tela do museu de Montreal)

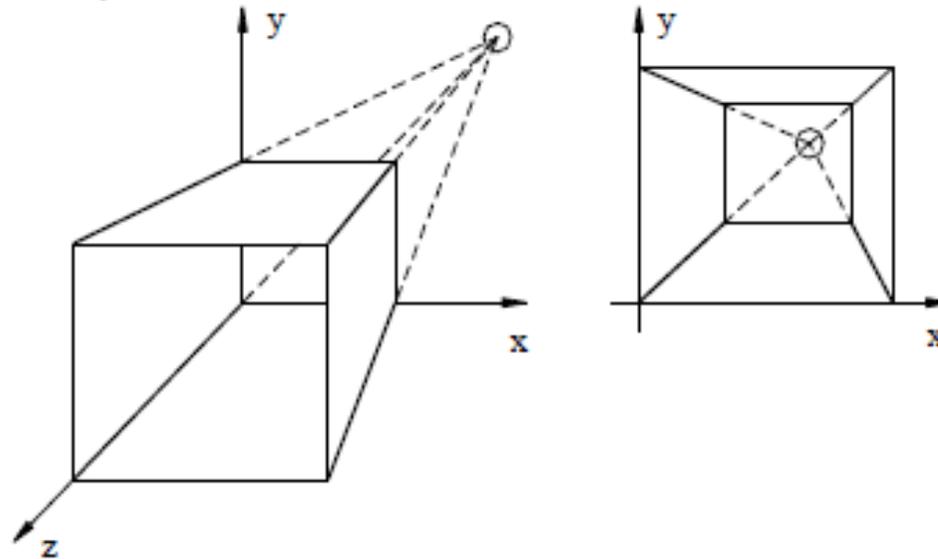


Características

- Projeções Perspectivas
 - Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
 - Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
 - Os raios projetores não podem ser paralelos.
 - Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
 - São mais realísticas na representação de objetos;
 - Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;

Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.



O que são eixos principais?

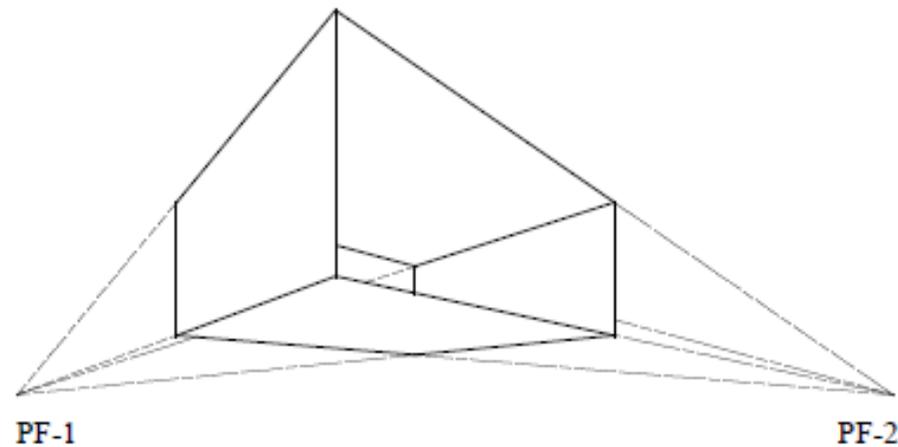
Maior e menor momento de inércia.

Não há produto de inércia para os eixos principais

Podem ser entendidos como os do menor BB possível para o objeto de interesse.

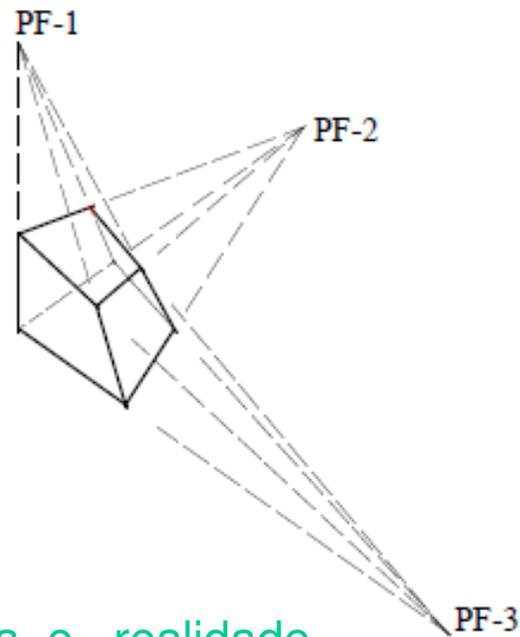
Pontos de fuga principais

- Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



Possível mas pode parecer não muito realista e incomum

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



3 pontos de fuga e realidade

Mas ocorre se o observador estiver muito perto de um objeto grande:

Vejamos 2
exemplos
reais:

Interior do
Museu
de
Mont real



3 pontos de fuga:

Foto de
uma rua
de

(Podgorica)
Montenegro
2014



Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva M do R^3 é uma transformação linear do R^4 .
- A matriz 4×4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto P do espaço afim é levado no hiperplano $w = rz + 1$
- Se $z = -1/r$, então P é levado em um ponto no infinito.
- Pontos do espaço afim com $z = 0$ não são afetados.

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto ideal, correspondendo a direção z , tem coordenadas $[0, 0, 1/r, 1]$
 - ◆ Este é o ponto de fuga principal da direção z .
 - ◆ Semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

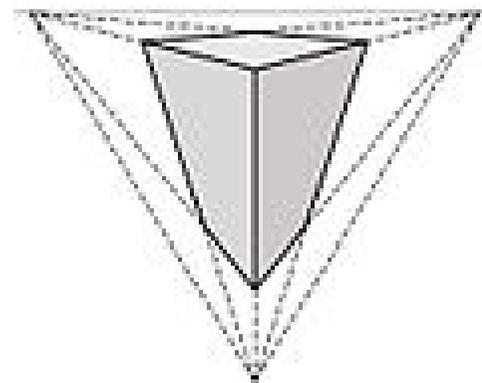
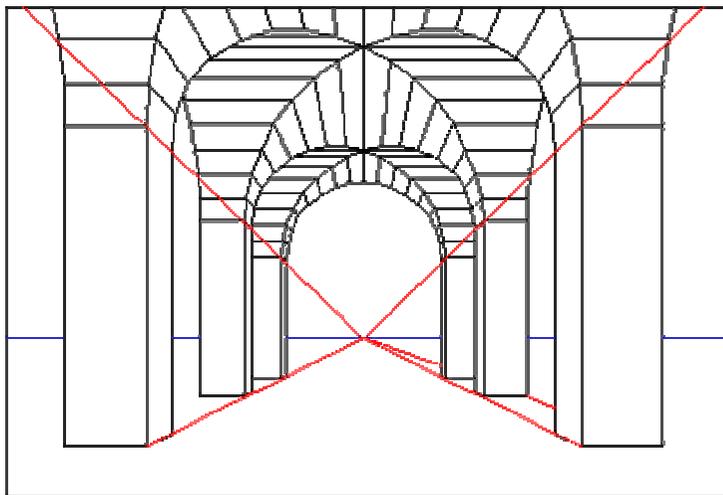
Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:
 - ♦ $[-1/p, 0, 0, 1]$
 - ♦ $[0, -1/q, 0, 1]$
 - ♦ $[0, 0, -1/r, 1]$
- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
 - ◆ rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
 - ◆ transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

Projetar Sempre Acarreta Perder Informação



As projeções podem reduzir

A dimensão do espaço subjacente do objeto em qualquer dimensão: por exemplo o logo da ISGG é um cubo do 4R projetado no 3R:

<http://isgg.net>

International Society for Geometry and Graphics



Bibliografia:

Anton, H. Rorres, C. Algebra linear com aplicações,
Bookman, Porto Alegre 2001

E. Azevedo, A. Conci, [Computação Gráfica](#): teoria e
prática, [Campus](#) ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley,A.van Dam,S.K.Feiner,J.F.Hughes. Computer
Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley,
Reading, 1990.

Gardan, Y. , Numerical Methods for CAD , MIT press,
Cambridge, 1985.