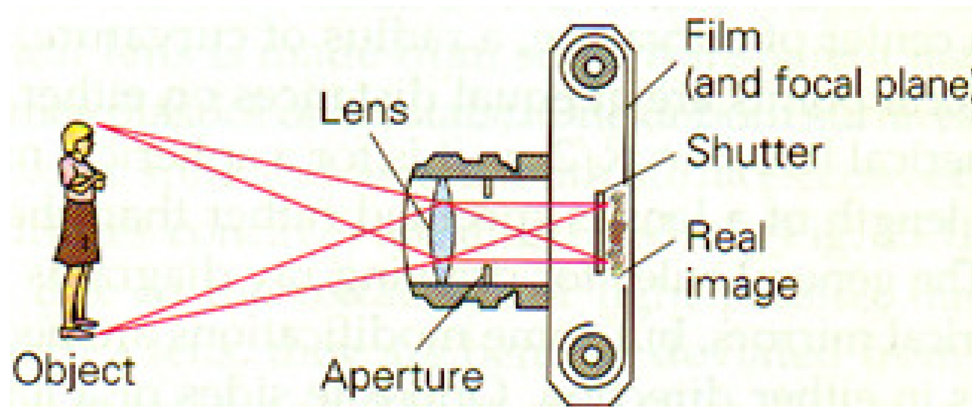
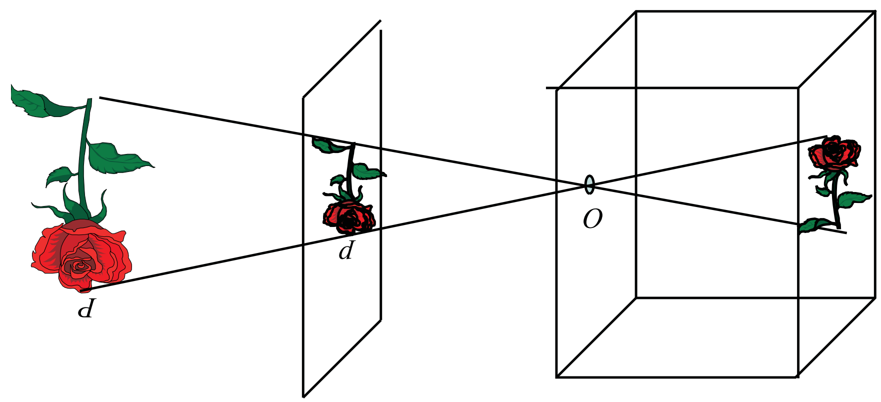
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html





aula 9

Coordenadas homogêneas e projeções

2016/2 – IC / UFF

TODAS AS Transformações Lineares Bidimensionais

- 2D
- São representadas por matrizes 2 x 2 ?

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Transformações de corpo rígido

- Translação
- Reflexão
- Rotação
  - Ângulos de Euler (*Oile*) em torno de um dos eixos das coordenadas, ou de qualquer eixo

Escopo de Transformações

- Podem ser feitas em serie a aplicadas uma só fez, mas a ordem é muito importante

Como uma única a matriz de transformação de uma serie

  - Essa operação de transformação nem sempre é comutativa !!!

Coordenadas Homogêneas

- Reflexão, rotação e escala podem ser executadas com o uso de matrizes
- Mas a transformação de translação não.
- Para solucionar esse e outros problemas é recomendado o uso de **coordenadas homogêneas** para todas as operações.

Coordenadas homogêneas

- no R^2 é um elemento do R^3 com uma relação de escala. $P = (x, y, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, 1)$

- Um ponto do plano é definido como:
  - Chamado $P = [x, y, 1]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).

Em coordenadas homogêneas as matrizes anteriores

- Devem ser 3 x 3 para as mesmas transformações afins bidimensionais.

$$M = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Matriz de Translação

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

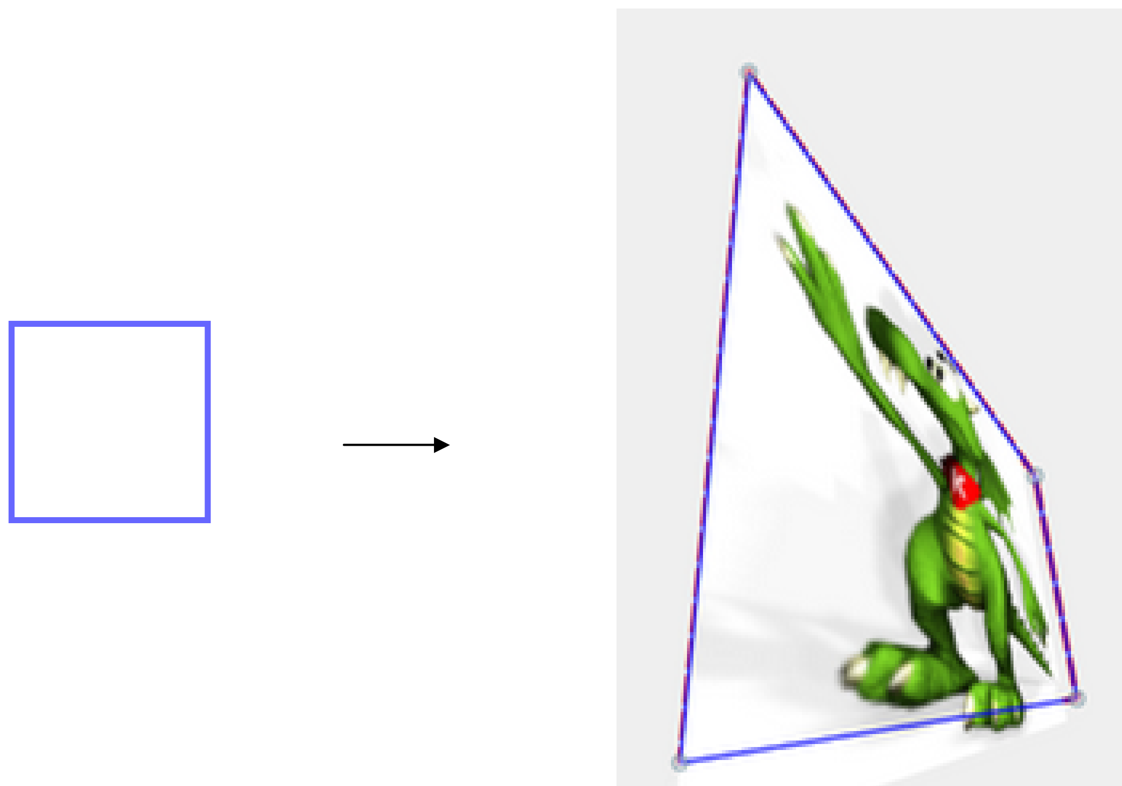
Transformações Lineares

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ p & q & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ px+qy+1\end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva 2D



Efeito em um ponto no infinito

$$M\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

Pontos de Fuga

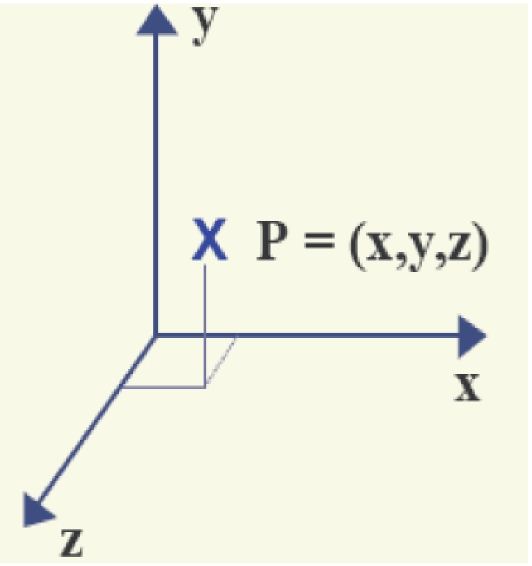
- Um ponto no infinito pode ser levado em um ponto P_0 do plano afim.
- Família de retas paralelas que se intersectam no infinito são transformadas numa família de retas incidentes em P_0.
  - P_0 é chamado de **ponto de fuga**.
  - Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
    - Imagem de $[x,0,0]$ ou $[0,y,0]$.

Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

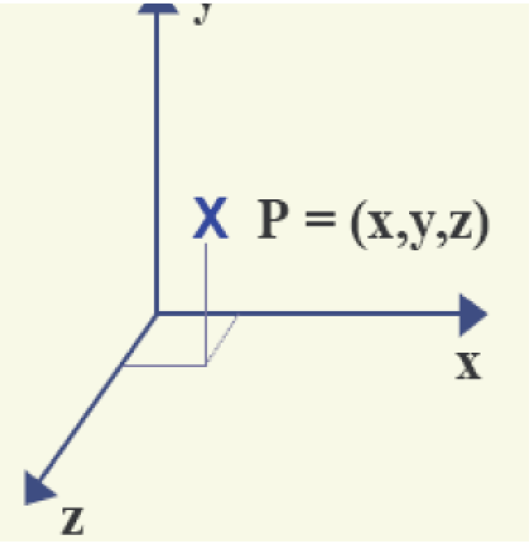
$$P = \{(x, y, z, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1)\}$$

  - Denotado por $P = [x, y, z, w]$ em coordenadas homogêneas.



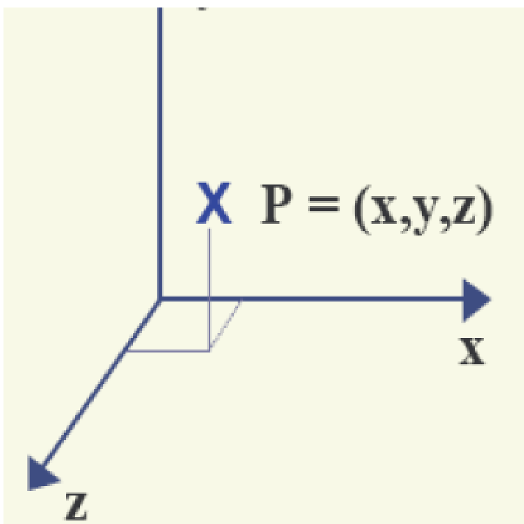
Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

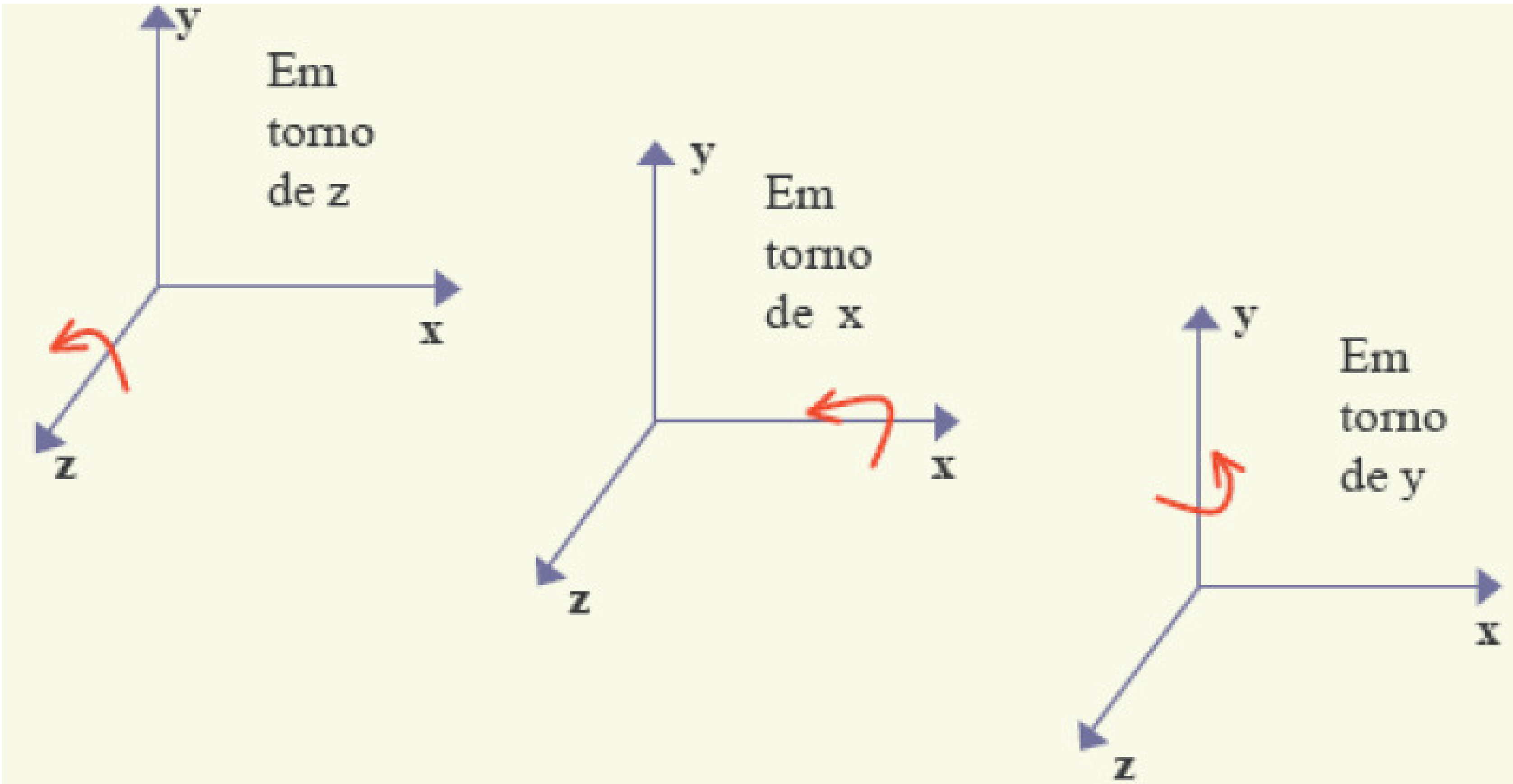


Escala em torno da origem do Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

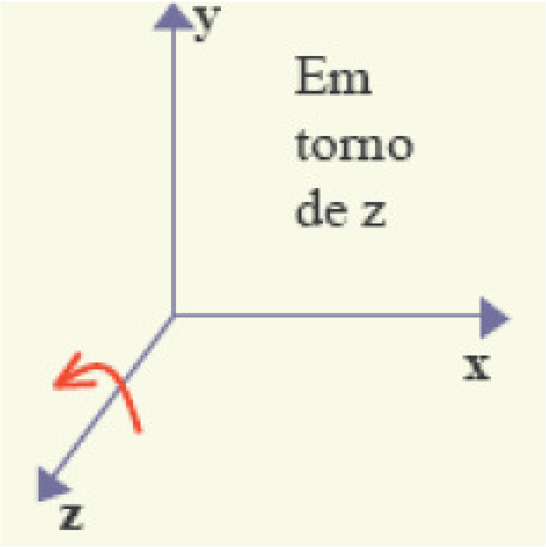


Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)



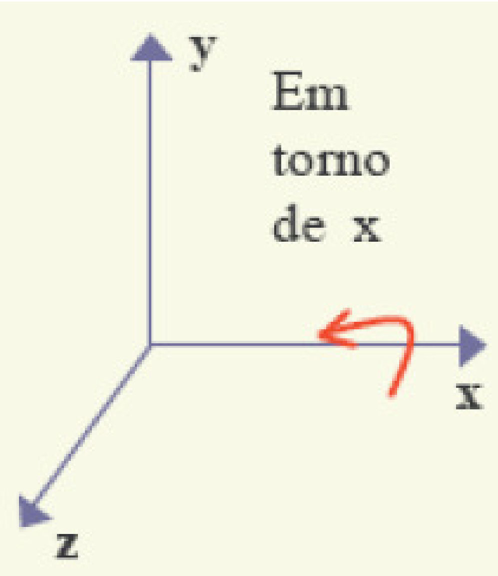
Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



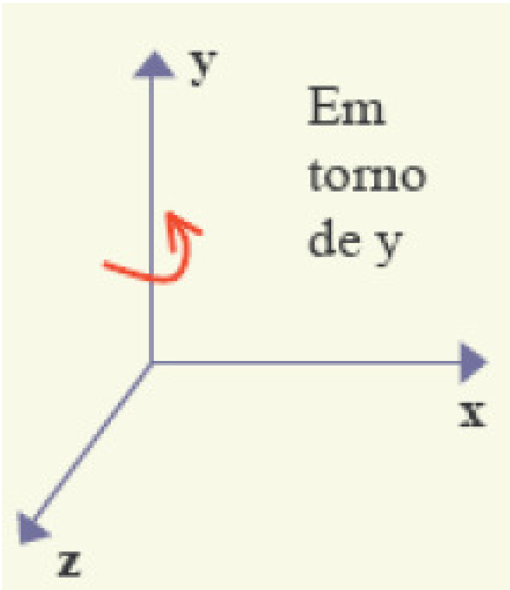
Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Coordenadas Homogêneas

- O sistema de coordenadas homogêneas (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por **(x’, y’, z’, M).**
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação **(x, y, z) = (x’/M, y’/M, z’/M)**
- Os pontos onde M=0 estão fora do espaço dimensional (infinito !!!!) .
- O uso de coordenadas homogêneas é importante em Computação também para permitir a representação de **reais por inteiros**
- Quando M=1 a representação é a mesma do espaço cartesiano.

Matrizes e coordenadas homogêneas na forma de vetores linha precisa usar a transporta !!

$$[x \quad y \quad 1] . \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz de rotação

Escala

$$[x \quad y \quad 1] . \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [x \quad y \quad z] . \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translação

- Pode ser representada por operações com matrizes quando usamos coordenadas homogêneas, uniformizando as transformações geométricas

$$[x \quad y \quad z \quad 1] . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{pmatrix}$$

forma de vetor linha

Matriz de Transformação

- Transformações geométricas correspondem a operações de soma e multiplicação nas coordenadas que compõem o objeto
- Para evitar que diversas operações matemáticas sejam feitas individualmente em cada vértice é criada uma **matriz de transformação com coordenadas homogêneas a qual é aplicada todas as transformações**
- Esta matriz é denominada matriz de transformação corrente e é utilizada para transformação de todos os objetos

Relembrando Transformações

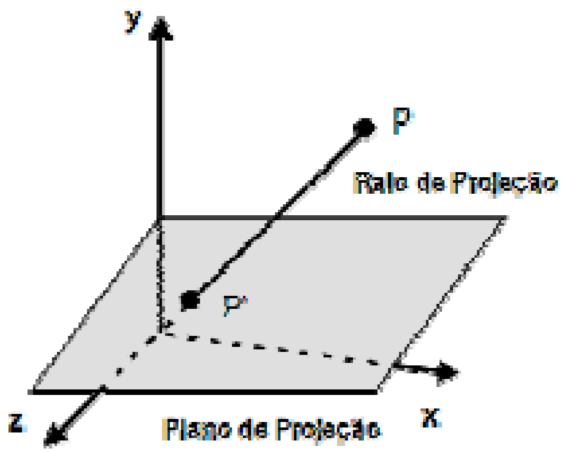
- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

  - Matrizes elementares associadas a efeitos

Projeções:

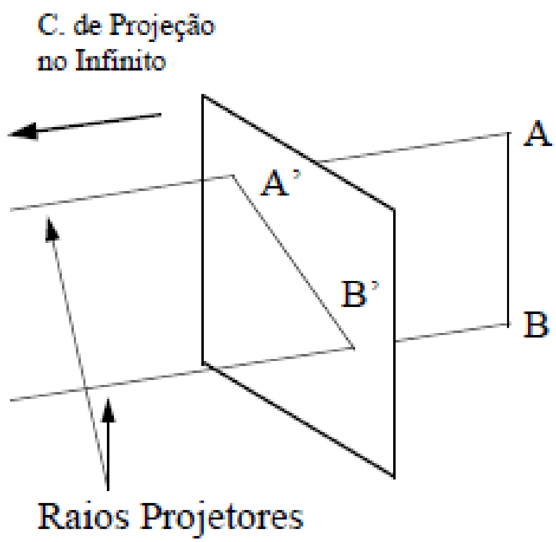
Elementos básicos:

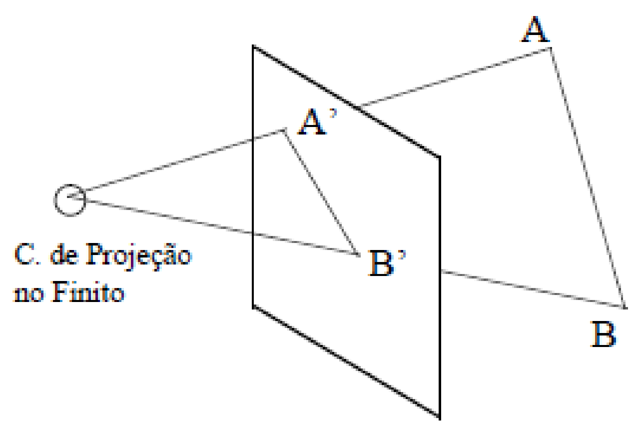
- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.



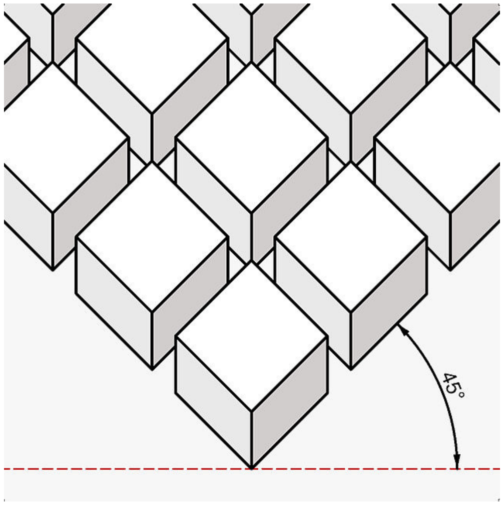
Classificação:

- Projeções paralelas e projeções perspectivas

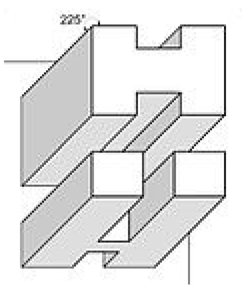


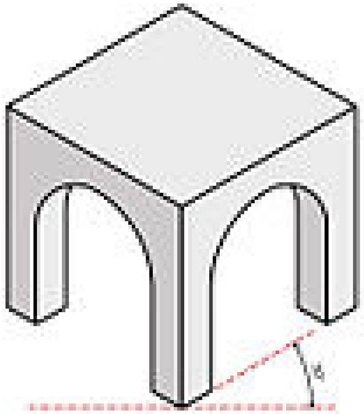


Características:



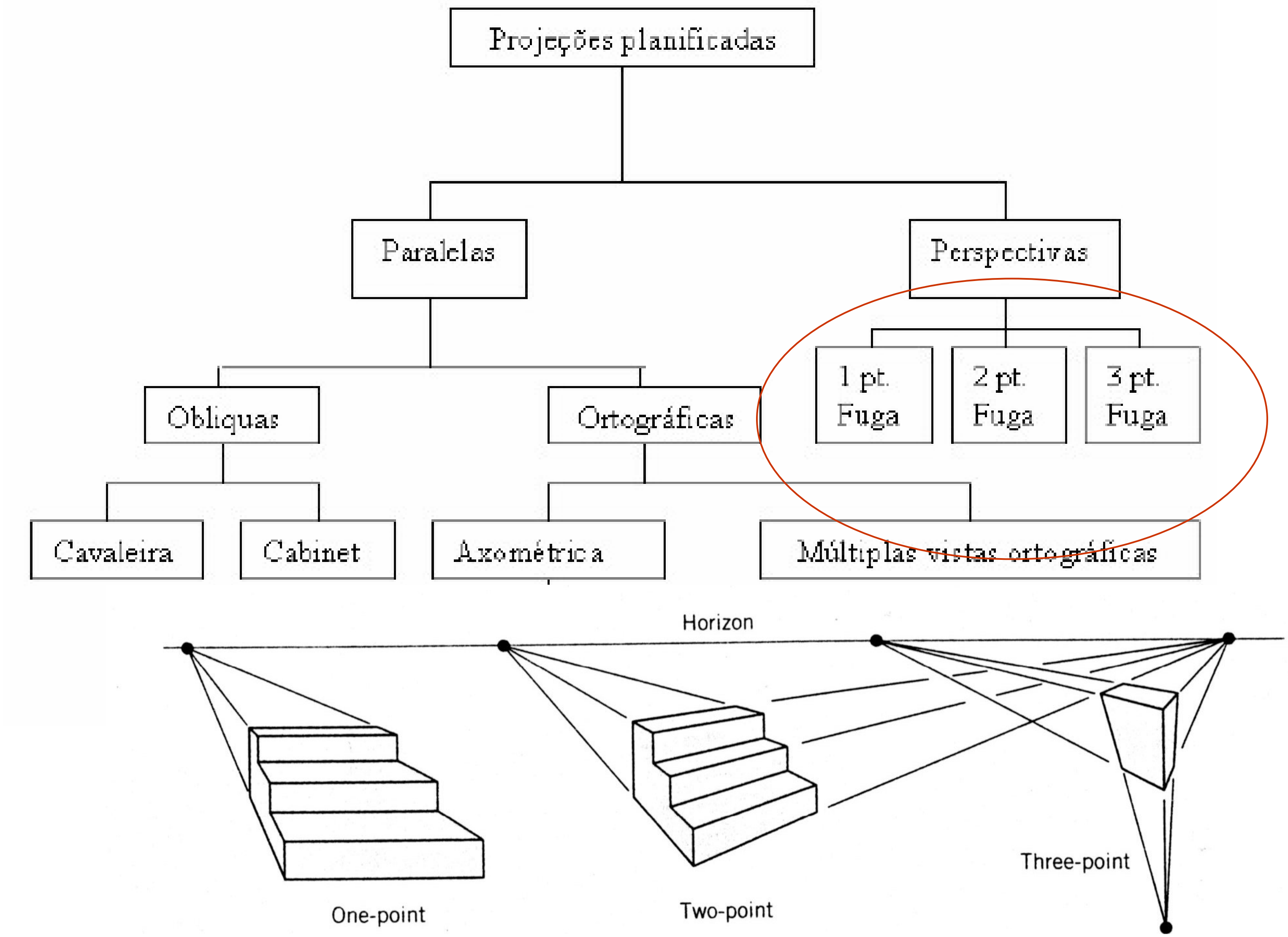
- Projeções Paralelas
  - O centro de projeção é localizado no infinito
  - Todas as linhas de projeção são paralelas entre si;
  - São tradicionalmente usadas em engenharia e desenhos técnicos;
  - Em alguns casos preservam as dimensões do objeto;
  - Não produzem imagem realista.





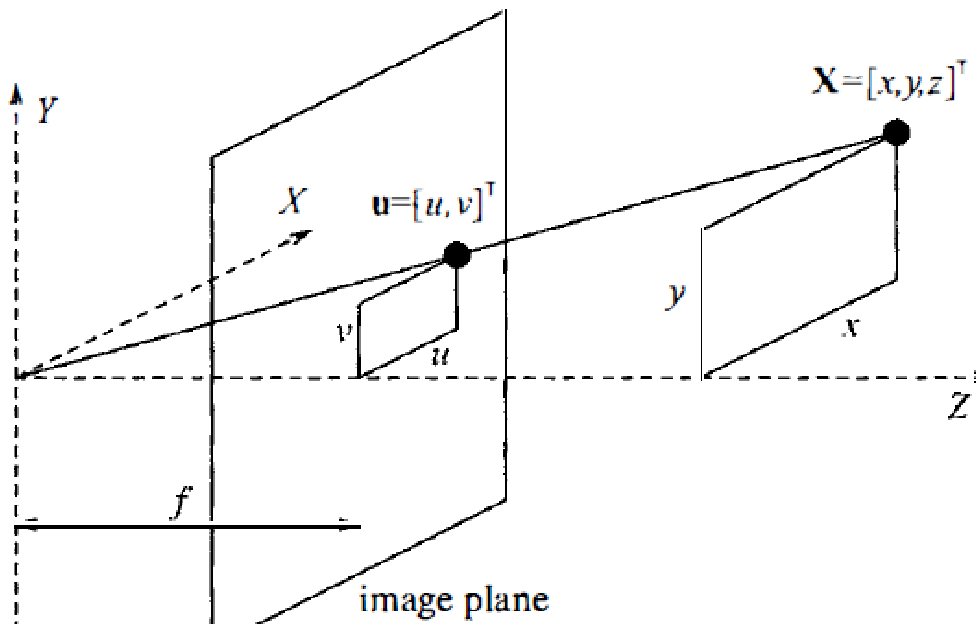
Características

- Projeções Perspectivas
  - Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
  - Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
  - Os raios projetores não podem ser paralelos.
  - Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
  - São mais realísticas na representação de objetos;
  - Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;


Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Obliquas
Ortográficas
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas
Horizon
One-point
Two-point
Three-point

Por similaridade de triângulos

$$u = \frac{x\,f}{z}\,, \qquad v = \frac{y\,f}{z}\,.$$



$f \to \infty.$

$z \to \infty$

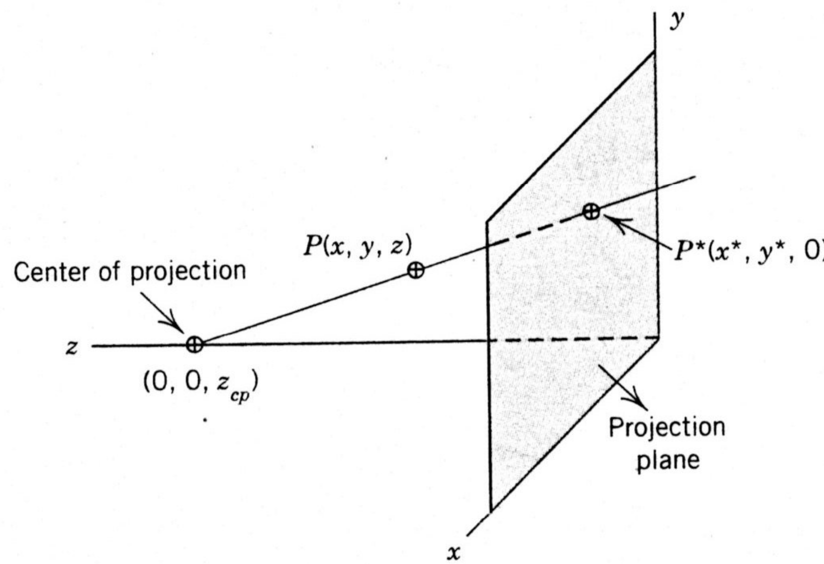
A non-linear perspective projection is often approximated by a linear **parallel** (or **orthographic) projection**, where $f \to \infty$. Implicitly, $z \to \infty$ says that the orthographic projection is a limiting case of the perspective projection for faraway objects.

Considerando $P\ (x, y, z)$

- Qual sua relação com sua **projeção** no plano ***z*=0** a partir de um **raio projetor no eixo *z***

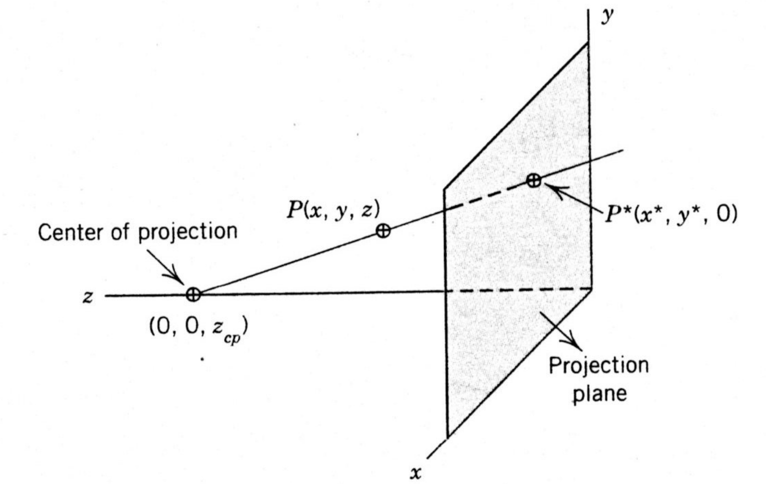
$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$

- $(0, 0, z_{cp})$?



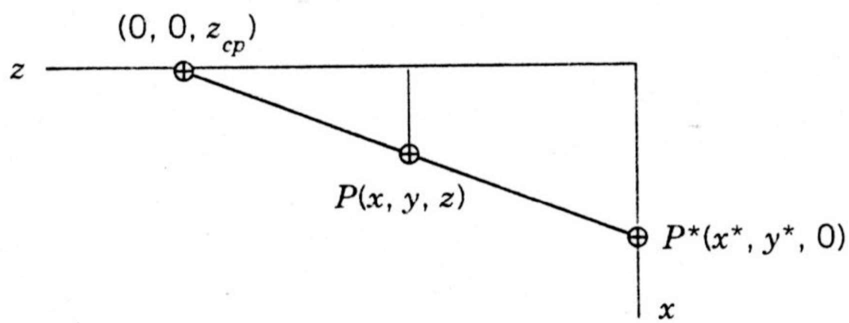
$P\ (x, y, z) \leftrightarrow P^*\ (x^*, y^*, 0)$

Considerando plano *zx* , ou $y = 0$



- Por semelhança de triângulos

$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$

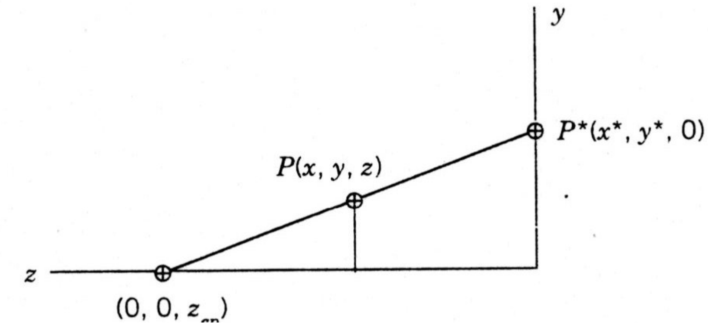


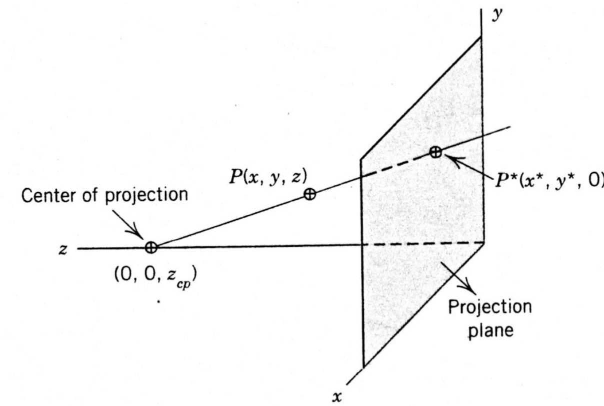
Organizando:

$$x^* = \frac{x}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Considerando plano zy , ou $x =$





- Por semelhança de triângulos :

$$\frac{y^*}{y} = \frac{z_{cp}}{(z_{cp} - z)}$$

Organizando

$$y^* = \frac{y}{1 - \frac{z}{z_{cp}}}$$

P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Organizando matricialmente:

$$P^* = [x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = \left[\frac{x}{\left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)} \quad \frac{y}{\left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)} \quad 0 \quad 1 \right]$$

- O que equivale a apena mudar a relação de homogeneidade:

$$= \left[x \quad y \quad 0 \quad \left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right) \right]$$

$$= [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz perspectiva para o **centro** de projeção sobre o eixo *z*

- Pode ser vista como a concatenação de uma **perspectiva** e uma **projeção ortográfica no plano *z* = 0**

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective transformation}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{orthographic projection}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective projection}}$$

Repare que essa matriz colocou valores $\neq 0$ em uma nova área da

nossa matriz de transformação em coordenadas homogêneas !

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

- Se com o centro de projeção sobre o eixo z, tivemos valor $\neq 0$ na terceira linha..... Então......
- Para uma projeção **sobre o eixo *x***, ou com centro de projeção em (x_{cp} , 0, 0)

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

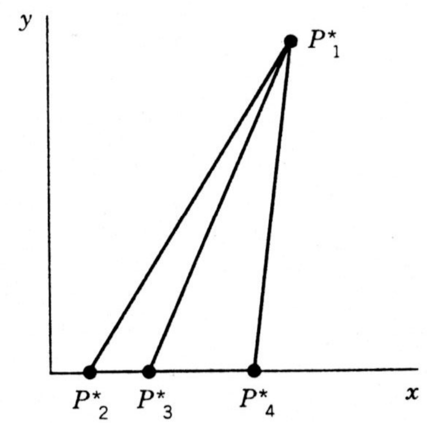
- Como um **tetraedro** com os vértices:

$P_1(3,4,0),\ P_2(1,0,4),\ P_3(2,0,5),\ P_4(4,0,3)$

- Ficaria?

$$[P^*] = [P][M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ \frac{5}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Para uma projeção sobre o eixo y, ou com centro de projeção em (0, y_{cp} , 0)

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Resumindo perspectivas com 1 centro de

sobre:

$$x \text{ axis: } [M_{PER}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y \text{ axis: } [M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E sobre z:

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 2 centros de projeção:

- É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 2-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elas podem ser consideradas como a concatenação de duas com

1 centro de projeção ! ! !

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 3 centros de projeção:

- É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 3-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembre que mesmo quando usávamos 2 x 2 e a forma transposta

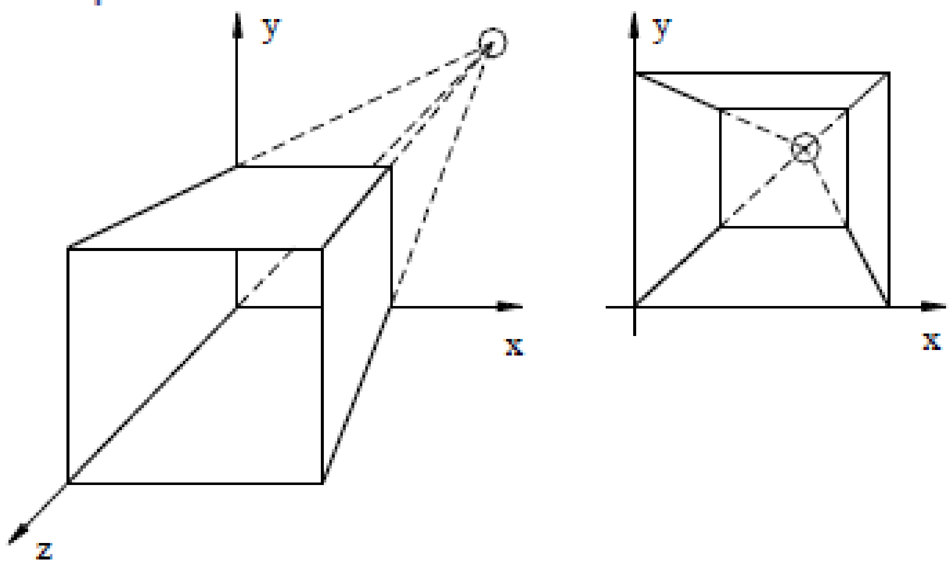
- (pós multiplicando o ponto a ser transformado)

- Já tínhamos visto isso?

- (quando imaginávamos o que faria a parte que ainda não estávamos usando da matriz de transformação ! ! !)

Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.

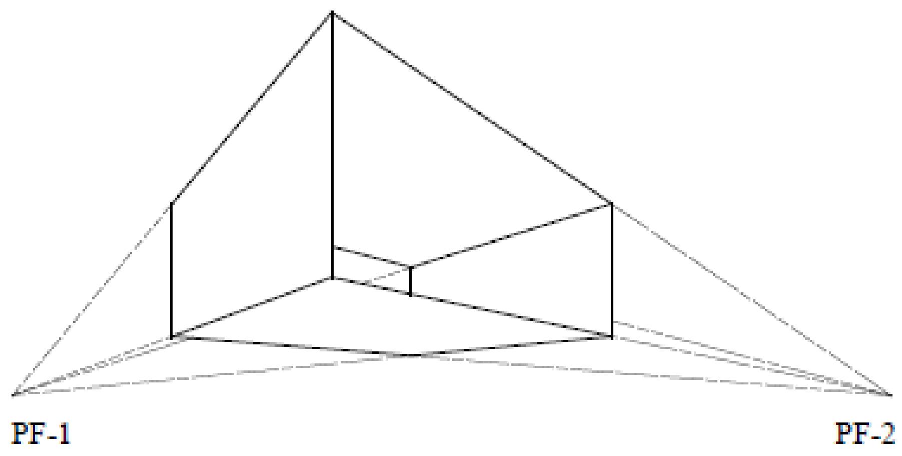


O que são eixos principais?

- Maior e menor momento de inércia.
- Não há produto de inércia para os eixos principais
- Podem ser entendidos como os do menor BB
- possível para o objeto de interesse.

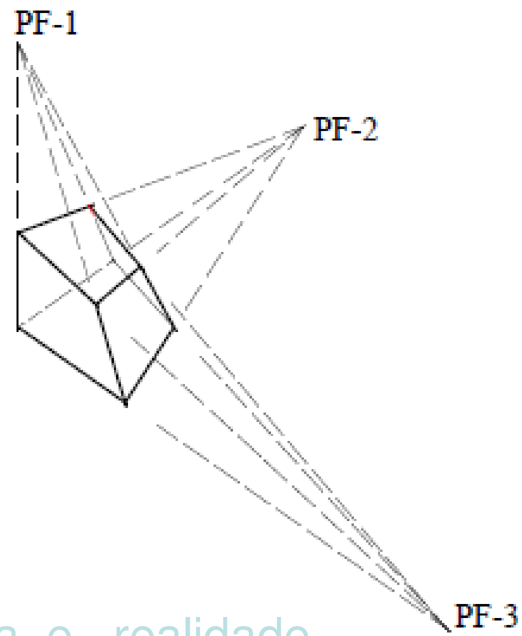
Pontos de fuga principais

- Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



não muito é realista

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



3 pontos de fuga e realidade

Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva M do R^3 é uma transformação linear do R^4.
- A matriz 4 x 4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto *P* do espaço afim é levado no hiperplano $w = r\,z + 1$
- Se $z = -1/r$, então *P* é levado em um ponto no infinito.
- Pontos do espaço afim com $z = 0$ não são afetados.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto ideal, correspondendo a direção *z*, tem coordenadas [0, 0, 1/*r*, 1]
  - Este é o ponto de fuga principal da direção *z*.
  - Semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

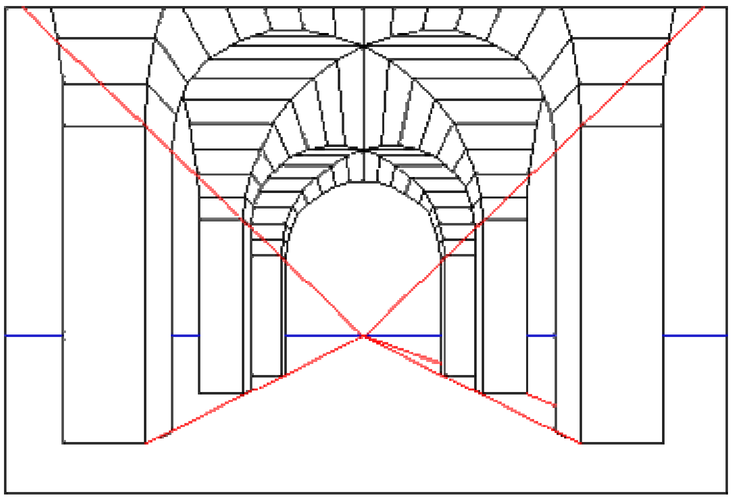
Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:
  - $[-1/p, 0, 0, 1]$
  - $[0, -1/q, 0, 1]$
  - $[0, 0, -1/r, 1]$
- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

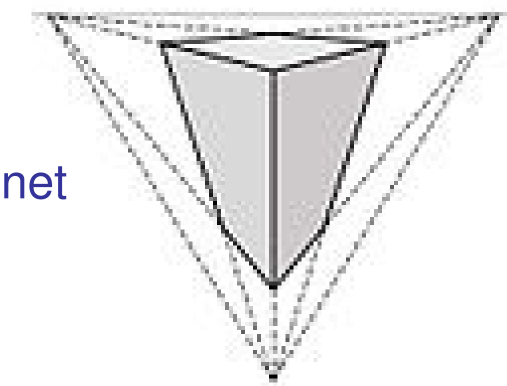
Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
  - rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
  - transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

Projetar Sempre Acarreta Perder Informação



http://isgg.net



International Society for Geometry and Graphics

ISGG

referencias

- E. Azevedo, A. Conci, Computação Gráfica: teoria e prática, Campus ; 2003 - Rio de Janeiro.
- Vera B. Anand, Computer Graphics and Geometric Modeling, John-Wiley,1993. BCTC/UFF - 006.6 A533 1993