Criadas por Charles Hermite (1822-1901)

https://pt.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite

Vetor é :

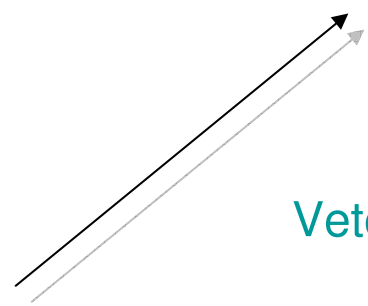
Na matemática - um elemento com de um espaço vetorial

Em Física – em oposição as grandezas escalares, algo que se caracteriza por ter intensidade, sentido , direção e ponto de aplicação em engenharia e outras ciências

Computação – arranjo unidimensional - estrutura de dados utilizada no contexto da programação.

Epidemiologia - um agente de disseminação de doenças infecto-contagiosas

aula 6



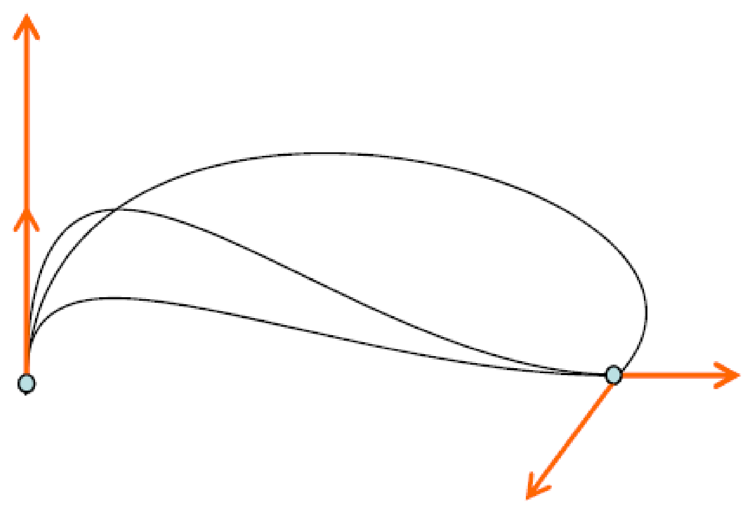
Vetor livre

Curvas de Hermite

2016/2 – IC / UFF

Curvas de Hermite

- Ao invés de modelar a curva a partir de um polígono de controle (Bézier), especifica-se pontos de controle e vetores tangentes nesses pontos
- Vantagem: é fácil emendar várias curvas bastando especificar tangentes iguais nos pontos de emenda
- Exemplos (cúbicas):



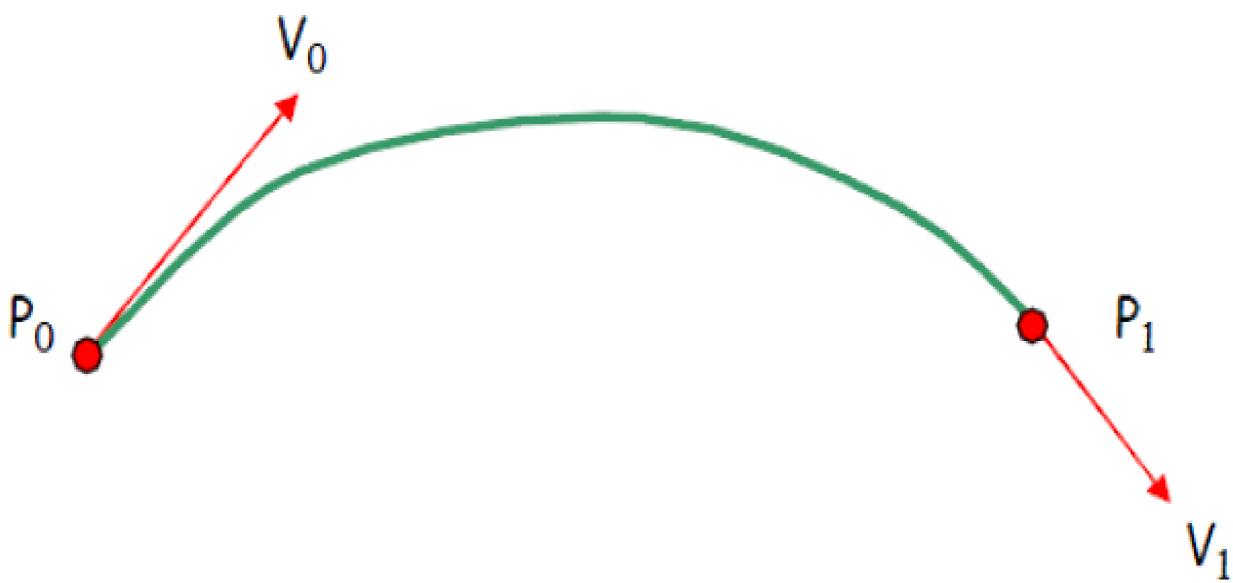
- A curva de Hermite é determinada por restrições no primeiro e último pontos
- O usuário especifica o primeiro (P_1) e o último pontos (P_4) bem como os vetores tangentes a P_1 e P_4, chamados R_1 e R_4

pontos de controle = *Pi*

Curvas de Hermite

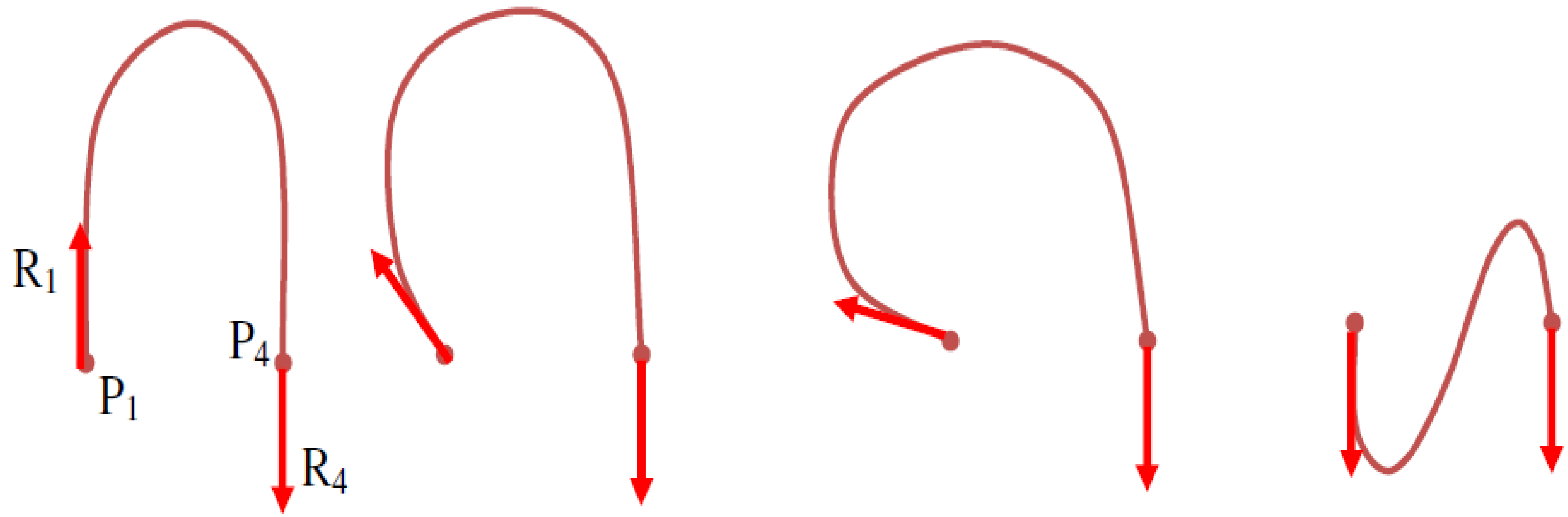
Definida a partir de restrições no ponto inicial e no ponto final.

- Os pontos propriamente ditos: P0 e P1
- Vetores tangentes nestes pontos: V0 e V1

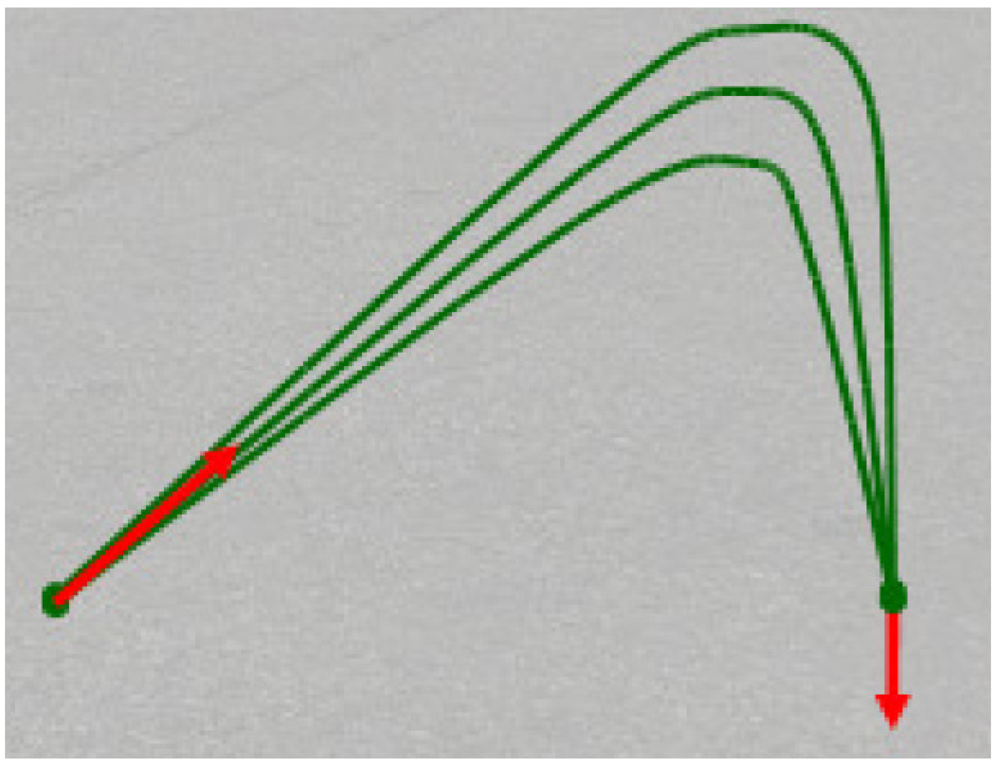


pontos de controle = *Pi*

Mesmos pontos iniciais e finais, apenas alterando a direção da tangente



Mesmos pontos iniciais e finais, apenas alterando a intensidade da tangente



Vantagens

- Bem fácil de implementar ☺
- Adequada para aplicações onde seja útil definir a curva em função dos vetores tangentes
- Passa nos pontos de controle (interpolação)

Desvantagens

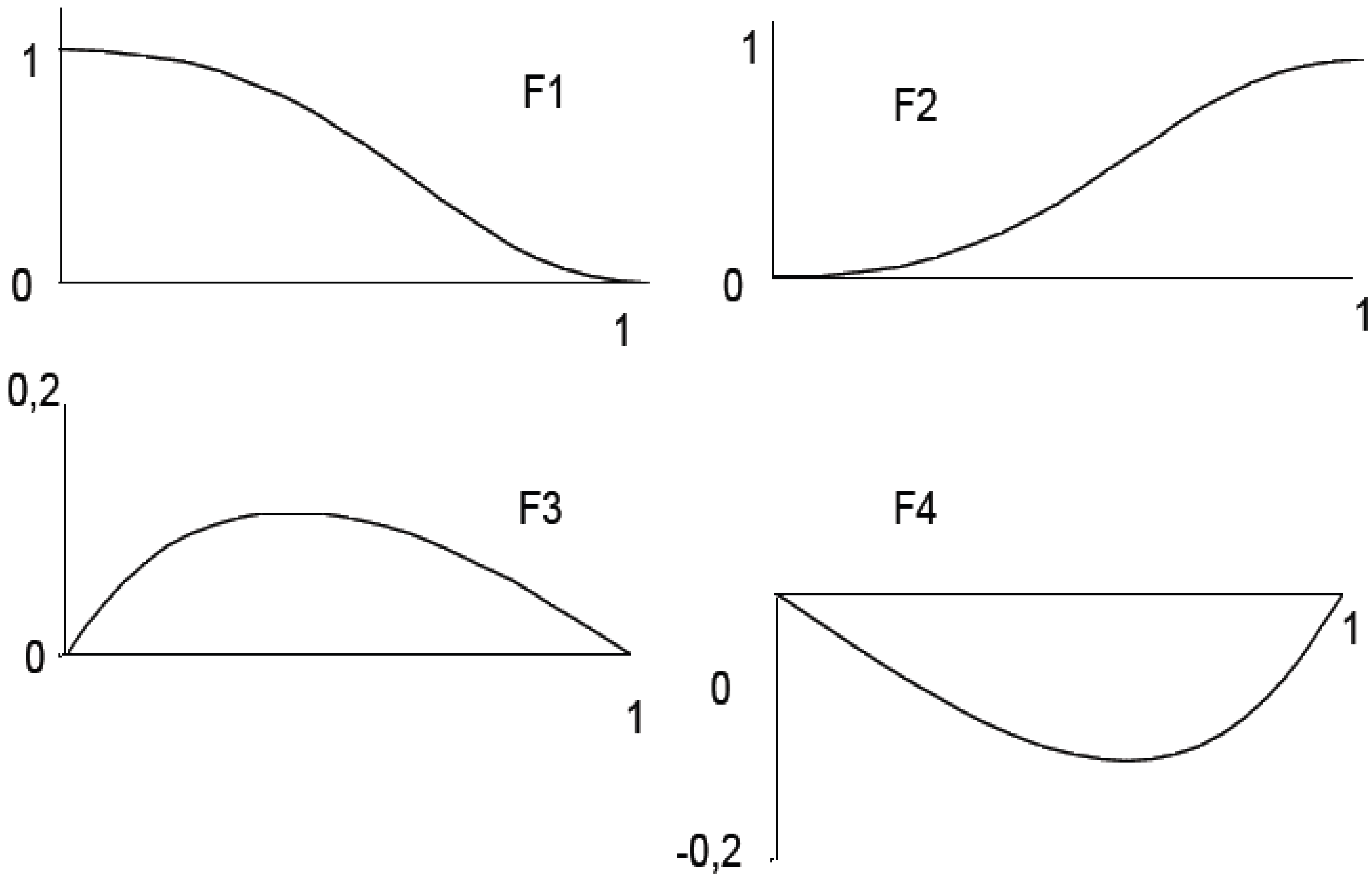
- Não garante, de forma automática, a continuidade entre os segmentos de curva
  - É necessário os vetores tangentes terem a mesma direção e sentido
- Não permite controle local
  - Alteração de um ponto de controle altera toda a curva

Forma matricial

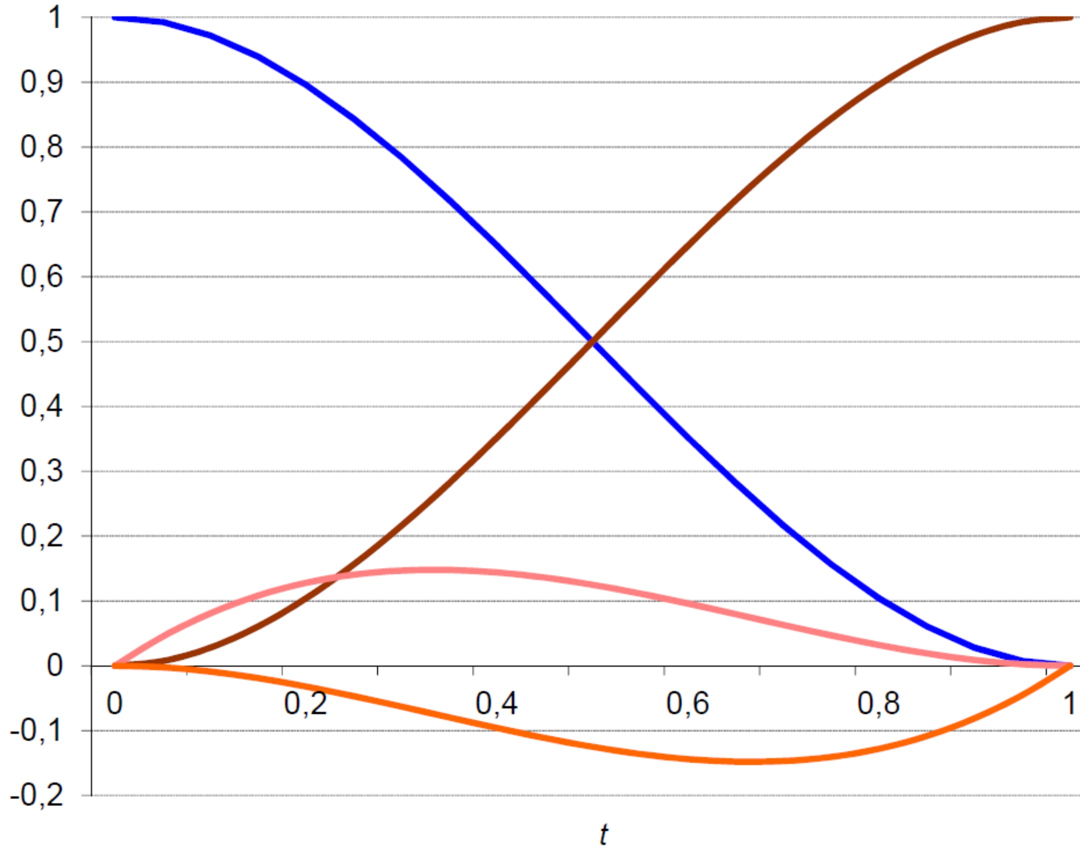
$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix}$$

pontos de controle = *P(0) e P(1)*

Funções de mistura de Hermite



Funções de mistura ou funções interpoladoras de Hermite



Funções de Mistura:

$F1(u) = (2u^3 - 3u^2 + 1)$

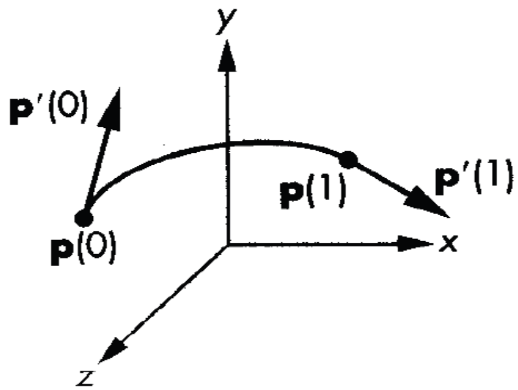
$F2(u) = (-2u^3 + 3u^2)$

$F3(u) = (u^3 - 2u^2 + u)$

$F4(u) = (u^3 - u^2)$

$p(u) = \quad F1.p(0) + F2.p(1) + F3.p'(0) + F4.p'(1)$

pontos de controle = *p e p´*



pontos de controle = *p e p´*

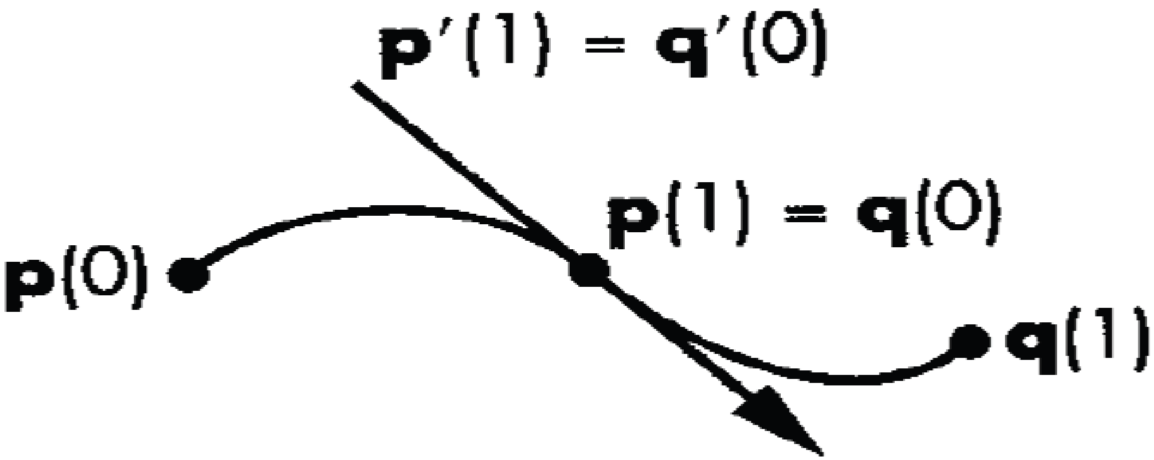
Definindo a curva de Hermite cúbica

p(u) = uT c = uT M_H p

$$M_H = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto $\mathrm{c} = \mathrm{M}_{\mathrm{H}}\mathrm{p}$

Como fica a curva formada pela união de 2 no ponto de união



pontos de controle = *p para a curva 1 e q para a curva 2*

$$Q_H(t) = TM_H G_H$$

pontos de controle = *Pi e Ri*

G_H é

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

G_{Hx} é a componente *x* de G_H:

$$G_{Hx} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{4x} \\ R_{1x} \\ R_{4x} \end{bmatrix}$$

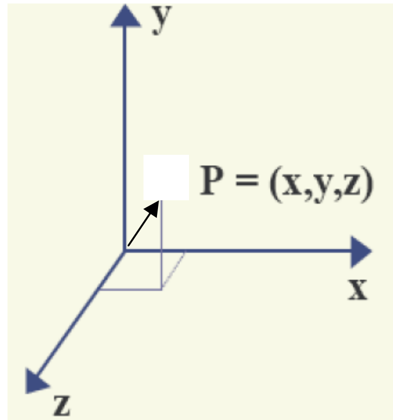
G_{Hy} é a componente y de G_H e
G_{Hz} é a componente z de G_H

Em uma implementação o usuário

- Definirá os pontos iniciais finais e os vetores nas coordenadas dele
- A curva de Hermite pode ser desenhada no trabalho, agora!!

Desafio:

- Você tem alguma idéia legal de como fazer para o usuário fornecer os dados dos vetores no pontos de controle?



Vamos falar um pouco mais de vetores

Ou pontos de um espaço vetorial
ou um arranjo unidimensional

os pontos (1,1,1) e (2,3,1)

Geometria Euclideana

- Geometria
  - Axiomas e Teoremas
  - Coordenadas de pontos
  - Objetos = conjunto de pontos
  - Distância entre 2 pontos => métrica
  - Comprimento dos vetores

$$(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \text{ (Euclidean metric)}$$
$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \text{ (Manhattan metric)}$$

Produto interno no R^n: *(inner product ou dot product)*

$$u.v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produtointerno$$

- comprimento ou norma: $\|u\| = |u| = (u.u)^{1/2}$,

- um vetor com comprimento 1 é chamado **normalizado** ou **unitário**

- **normalizar** um vetor => $u / \|u\|$

- distância entre 2 pontos PQ =>comprimento do vetor Q-P

Como se calcula a distância entre os pontos (1,1,1) e (2,3,1) ?

Vendo esses pontos como vetores, como eles são transformados em vetores unitários?

$$u \,.\, v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produto interno$$

Produto interno no R^n:

(inner product ou dot product)

$$(u \,.\, v) = |u| \, |v| \cos (\beta)$$

ângulo entre 2 vetores: u,v

arco cosseno de

$$= (u \,.\, v) \,/\, |u| \, |v|$$

Vendo os pontos (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) , (1,1,1) e (2,3,1) como vetores, qual o ângulo entre eles?

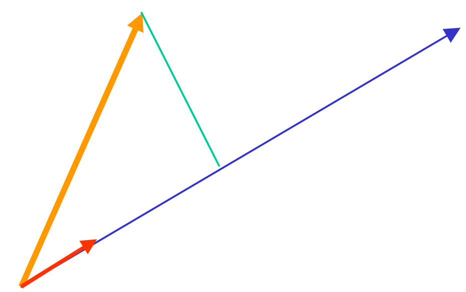
Quantos destes vetores (acima) são vetores unitários?

Produto interno no R^n:

(inner product ou dot product)

$$u\,.\,v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produtointerno$$

$$(u\,.\,v) = |u|\,|v| \cos(ß)$$



a projeção de um vetor *w*
perpendicularmente em uma data direção definida por um vetor *v é o produto interno de w pelo vetor unitário na direção de v : u*

Projete o vetor (2,3,1) na direção de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) , (1,1,1) e (1,0,0) - (0,1,0).

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produtointerno$$

Produto interno no R^n:

(inner product ou dot product)

$(u \cdot v) = |u|\,|v| \cos(ß) = 0$

2 vetores: *u,v*

são chamados **ortogonais** se forem perpendiculares, ou seja se o ângulo (ß) entre eles for 90 graus

como o cosseno de 90 graus = 0

$(u \cdot v) = |u|\,|v| \cos(ß) = 0$

Logo *w e u* são ortogonais a um vetor *v* se...

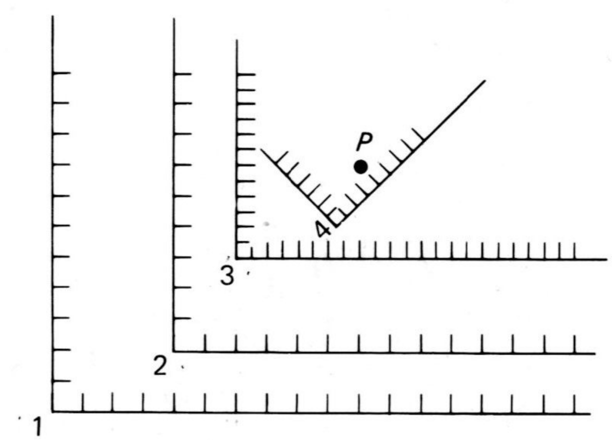
(complete com suas palavras)

Bases ortonormais

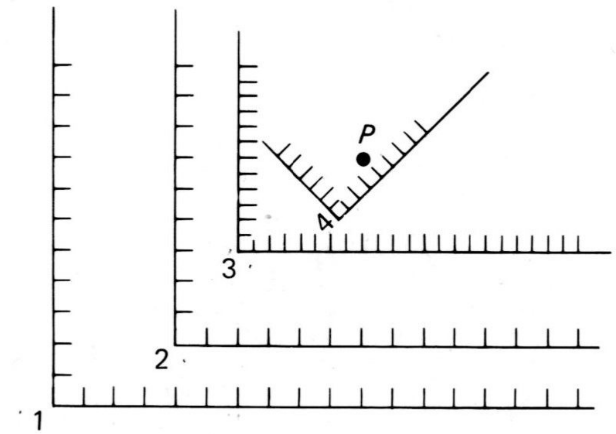
- Uma base é **ortogonal** se os vetores que a compuserem forem mutuamente **ortogonais**.

- Uma base é **ortonormal** se os seus vetores além de **ortogonais** forem unitários.

- **As 4 bases ao lado**
- **são ortonormais ?**
- **(em relação a elas próprias e**
- **em relação a base canônica do R^2?)**



Mudança de base:



- Dado um ponto em um
- sistema de eixos como
- representá-lo em outro
- sistema qualquer?

- $P = (10,8)^1 = (6,6)^2 = (8,6)^3 = (4,2)^4$

Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

Transformar

- É mudar as coordenadas de pontos
- Usar funções !

$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \Longrightarrow p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

Operações com pontos ou vetores

Conceitos:

- multiplicação de vetores (*u* , *v* , *w*) e matrizes *T*
- soma de vetores.

- Vetores => (linha ou c $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$
- Transposta (T^T i,j) = (T j,i)
  - $(AB)^T = B^T A^T$

$$(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Vetor coluna (n x 1): T (u)
- Vetor linha (1 x n) : (u’) T^T

Transformações simples

- Definição

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(av) = a\, T(v)$

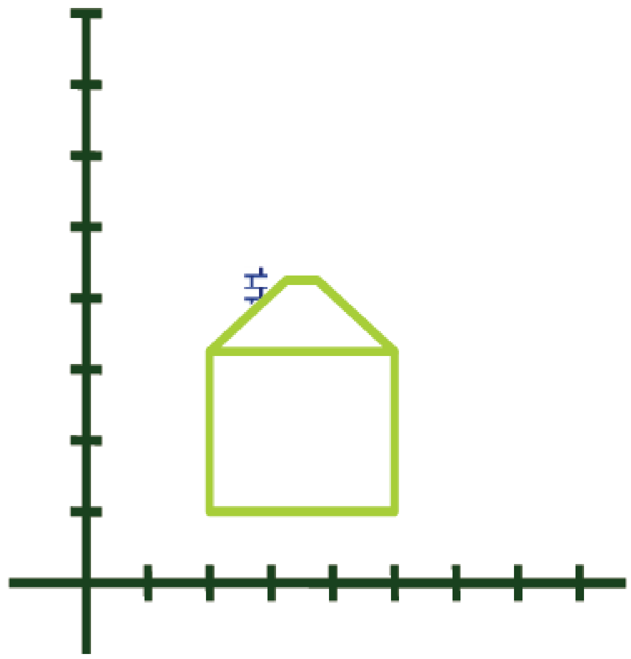
- u , v vetores de dimensão n= 2 ou 3 .

- T matriz quadradas n x n.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Uma curva ou

- Um objeto em CG e´ definido pelo seu conjunto de pontos



Transformar um objeto

- É transformar seus pontos

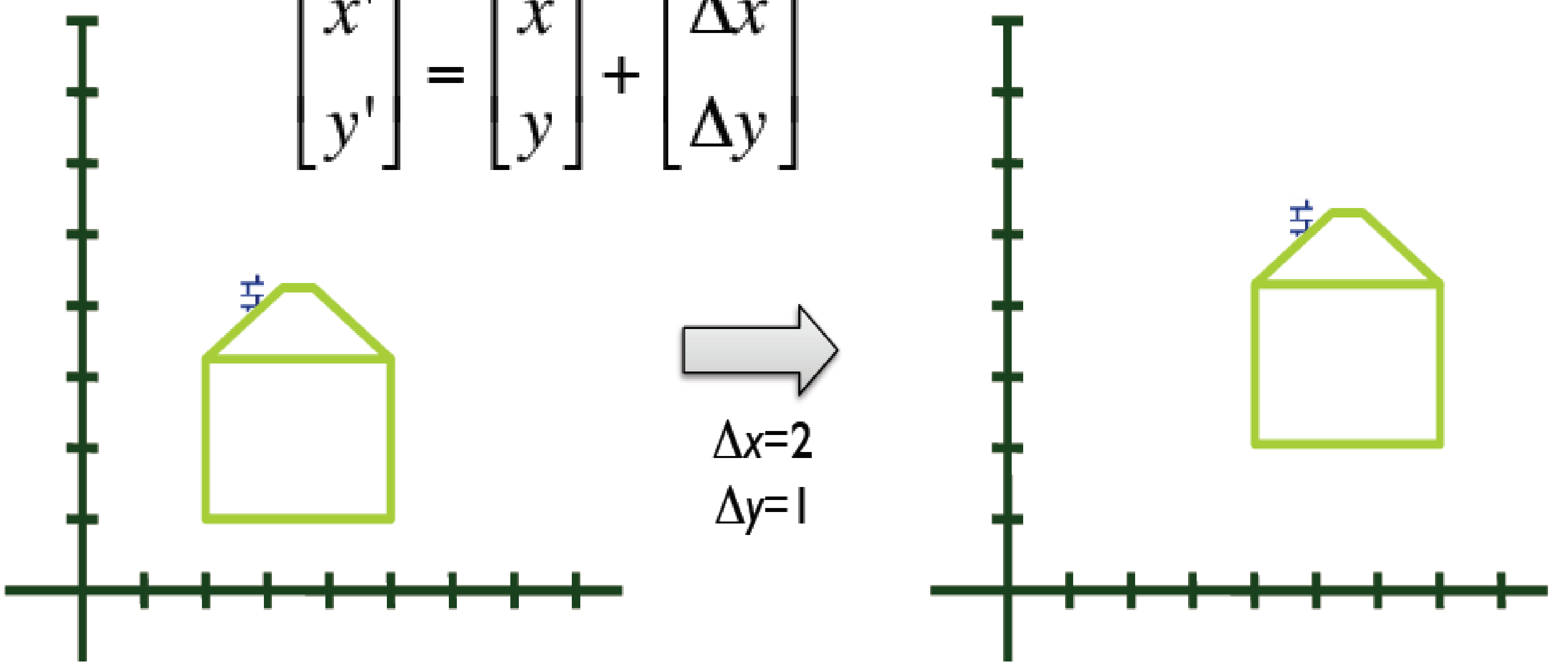
$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

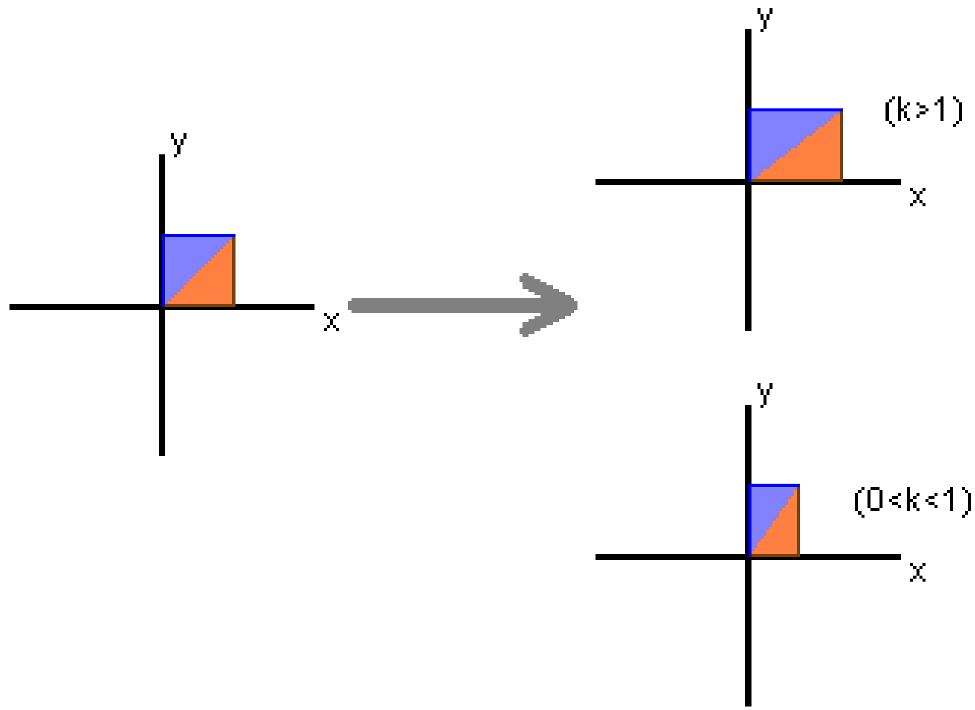
Transformações afins

Translação dos vetores ou pontos do objeto

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

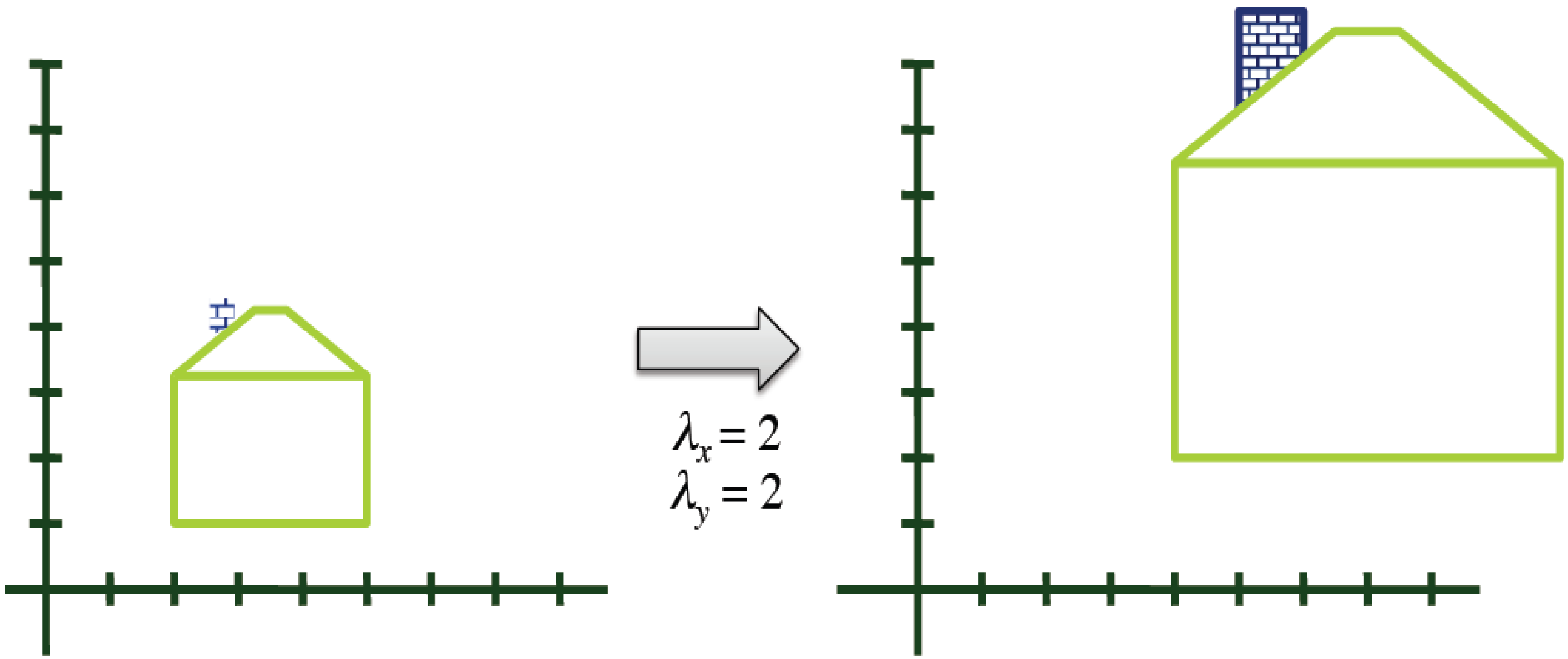


Mudança de Escala em uma direção (horizontal)



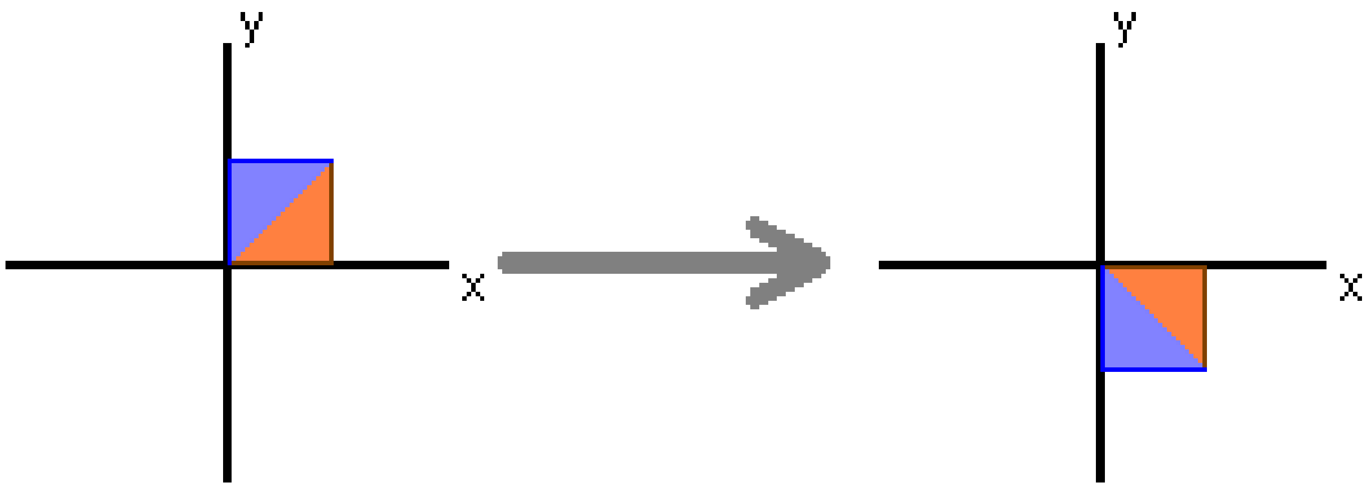
$$S_x = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mudança de escala



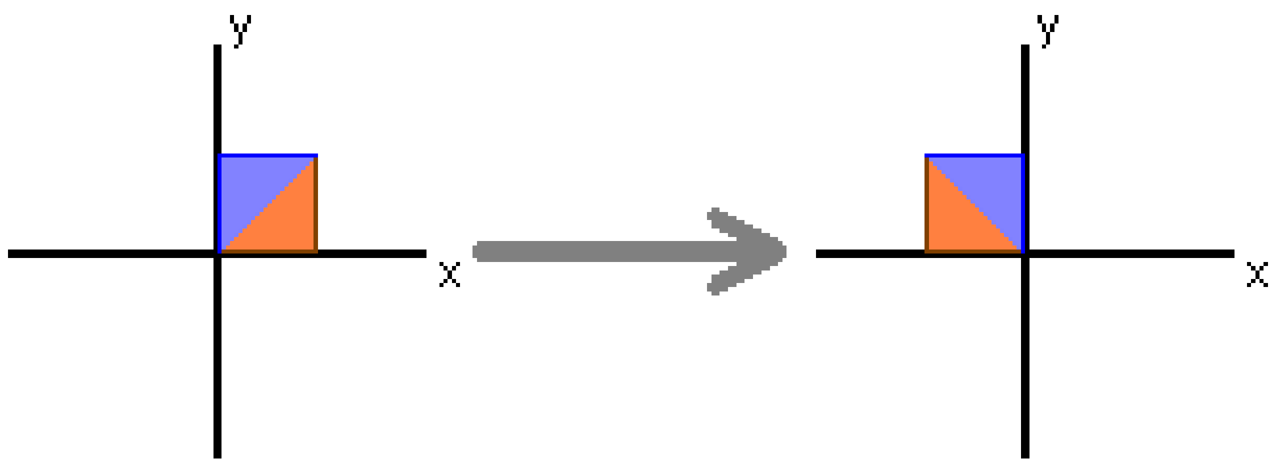
Reflexão em Relação ao Eixo X

$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



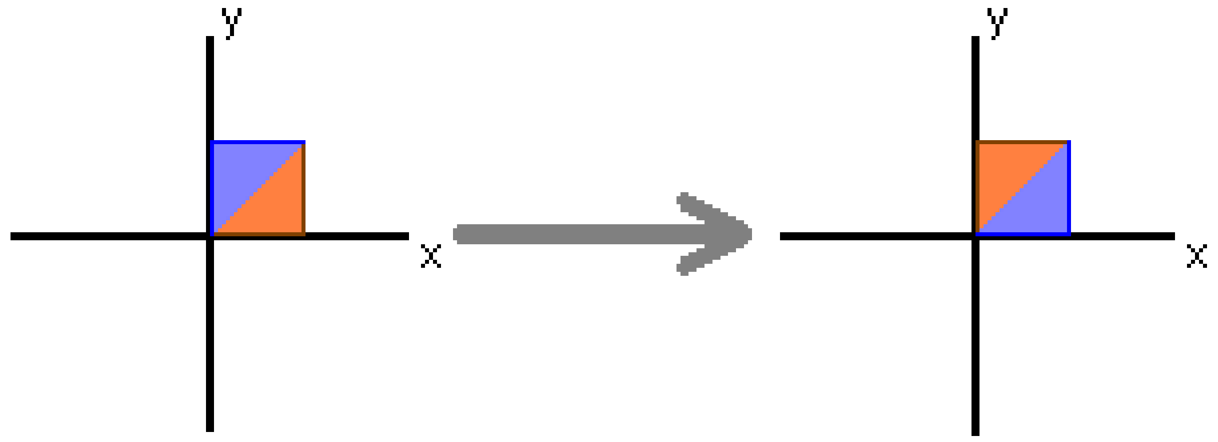
Reflexão em Relação ao Eixo Y

$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



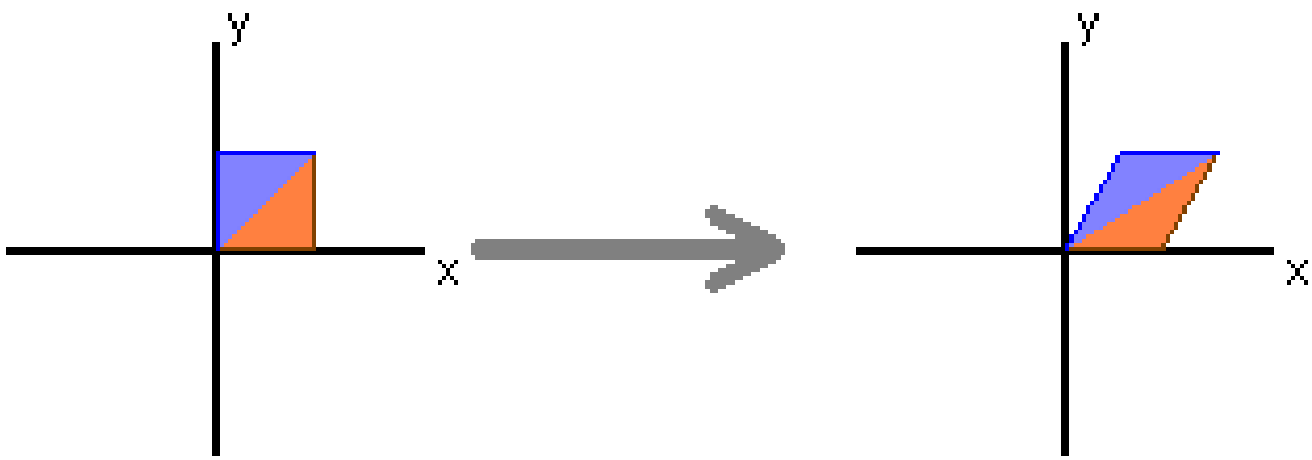
Reflexão em Relação à Reta $y = x$

$$Rfl_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

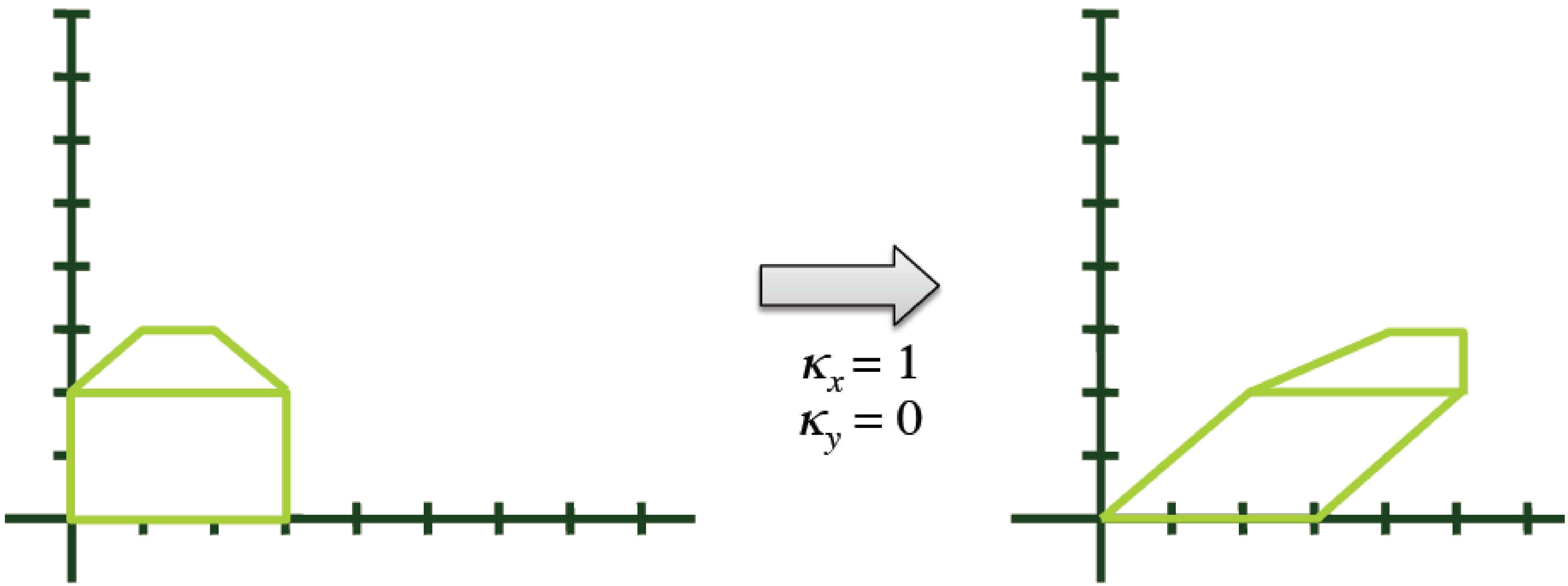


Cisalhamento em X

$$C_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Cisalhamento na horizontal:

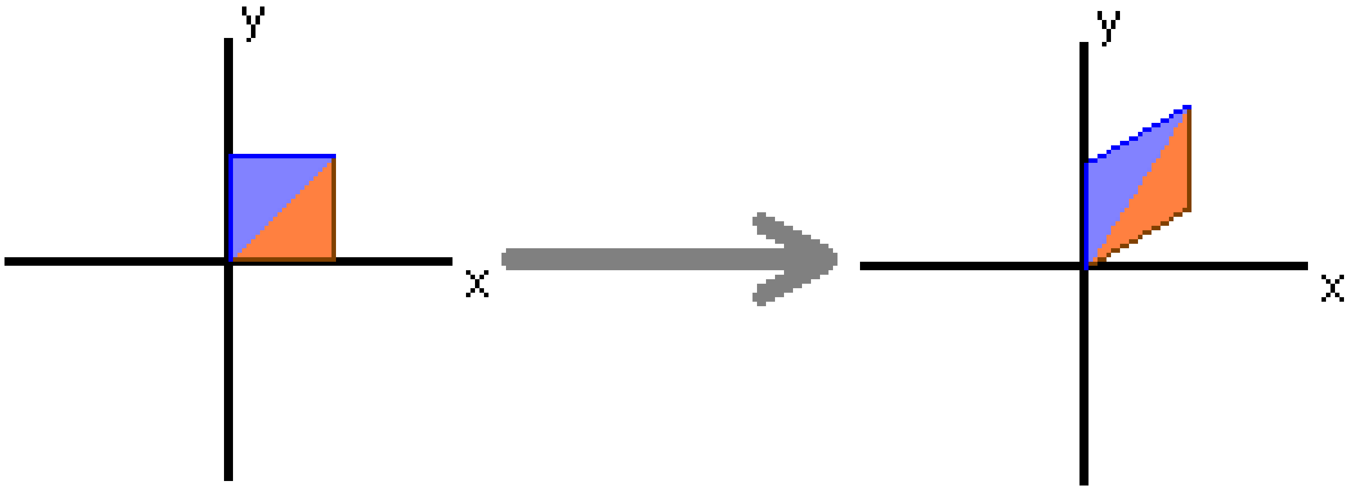


$$\kappa_x = 1$$
$$\kappa_y = 0$$

$$\begin{cases} x' = x + \kappa_x y \\ y' = y + \kappa_y x \end{cases}$$

Cisalhamento em Y

$$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

Transformações simples!

- Definição

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(av) = a\,T(v)$

- u , v vetores de dimensão n= 2 ou 3 .

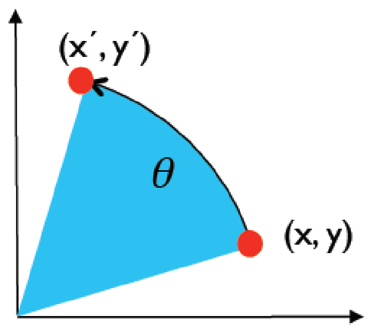
- T matriz quadradas n x n.

TODAS AS Transformações Lineares Bidimensionais

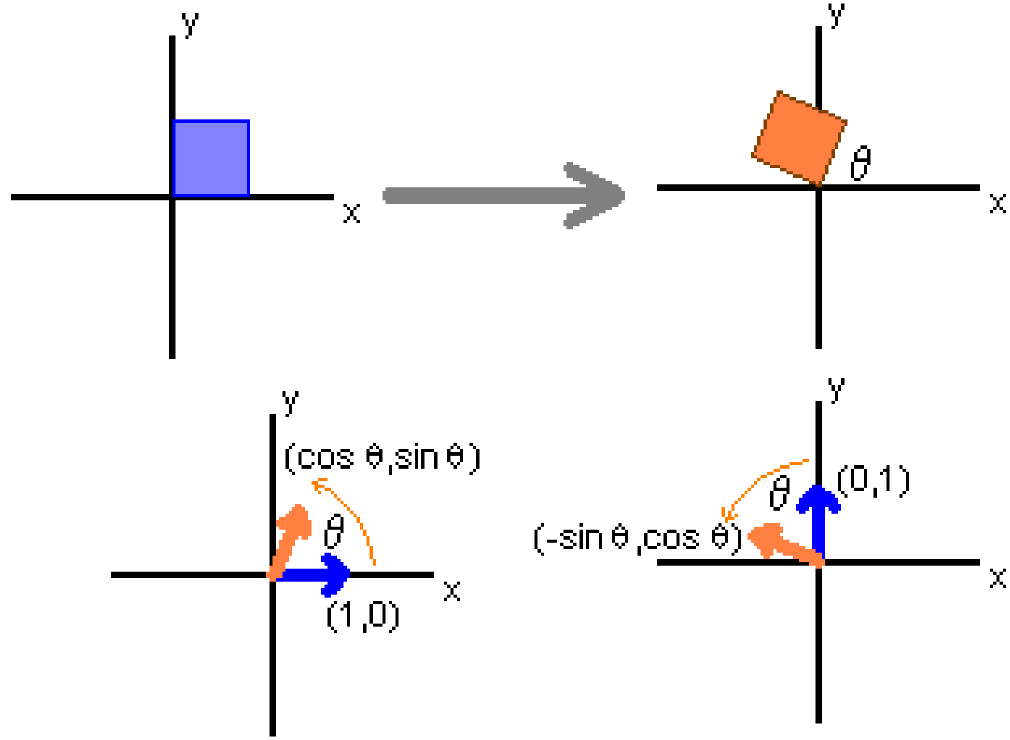
- 2D
- São representadas por matrizes 2 x 2.

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

Rotação em torno da origem



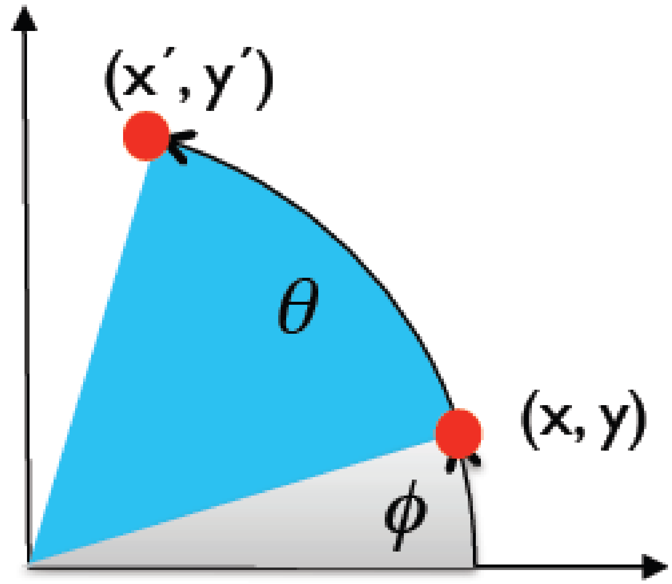
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



Como esse chegou a essa fórmula:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi+\theta) \\ y' = r\sin(\phi+\theta) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

Substituindo r cos(ϕ) e r sin(ϕ) por x e y nas equações anteriores tem-se:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$