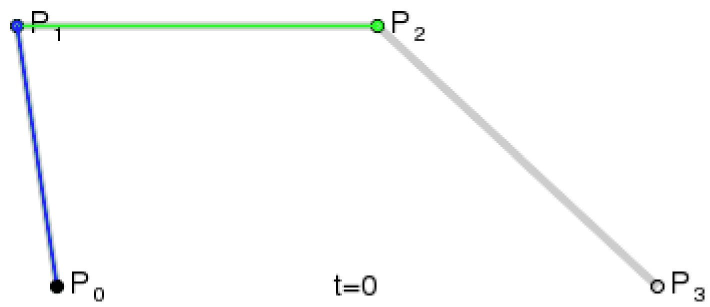
https://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Bezier

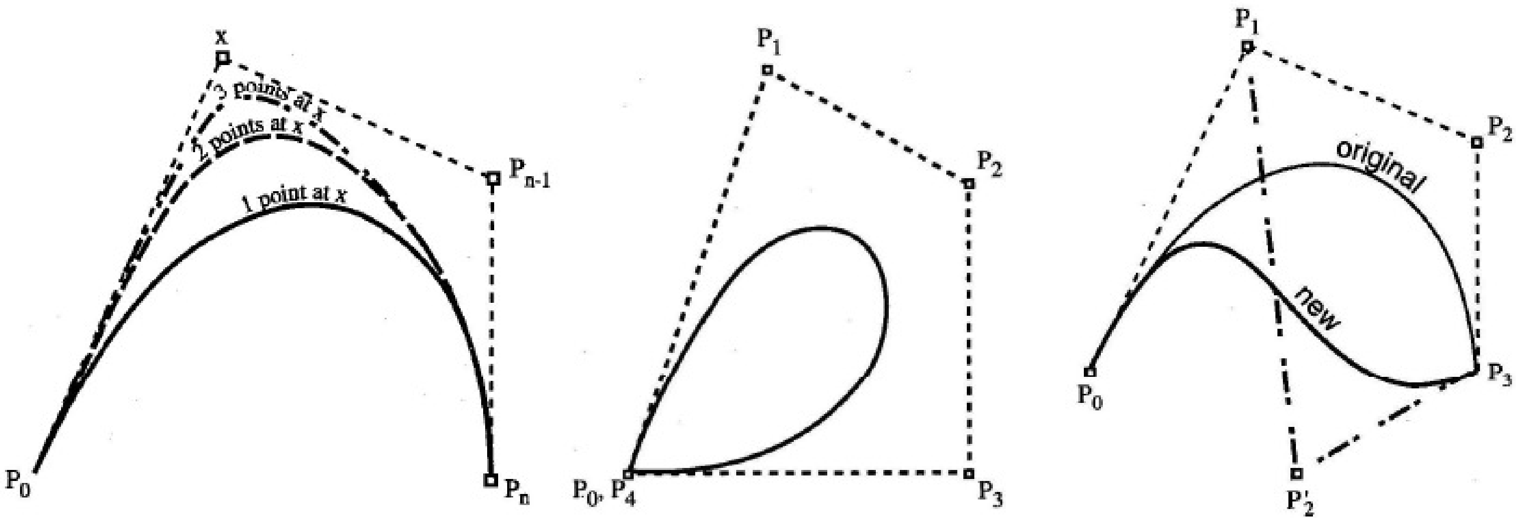


aula 5

Curvas de Bezier
2016/2 – IC / UFF

Curva de Bezier

- Desenvolvidas por Pierre Bezier para descrever o desenho de curvas e superfícies de forma livre
- Polígono definidor
- Primeiro e último ponto
- Vetor tangente

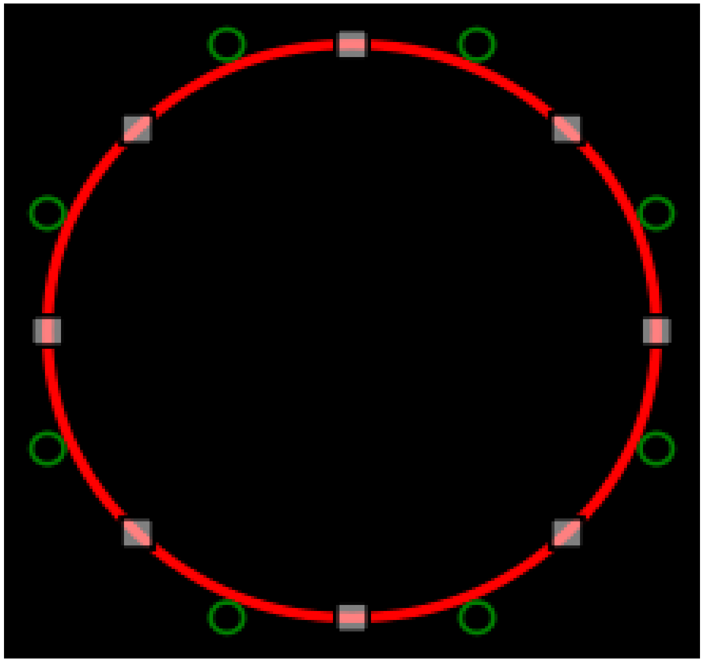


pontos de controle = P_i

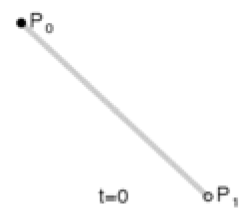
Onde se usa: Qualquer representação de curvas

Até onde você nem imaginar!
Por exemplo:
Os contornos dos caracteres em fontes TrueType são feitas de segmentos de retas e curvas Bézier quadrática.

O circulo ao lado é formado por 8 segmentos. Os quadrados são os pontos de controle da extremidade e os anéis os de controle do interior.



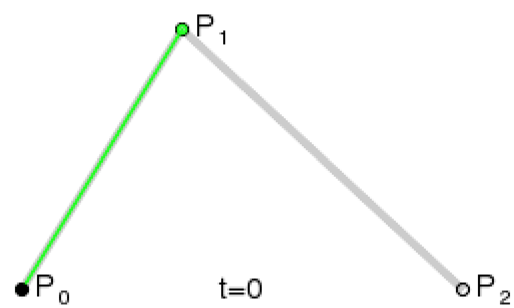
Um segmento linear pode ser definido por Bezier:



pontos de controle = P_0 , P_1

Um segmento de curva quadrática de Bézier é definido por 2 pontos extremos e 1 de controle.

pontos de controle, i =0,1,2 , P_i



Curva polinomial desenvolvida em 1962 por Pierre Bézier.

Utilizada no projeto de automóveis (Renault).

Baseada no algoritmo de De Casteljau em 1957.

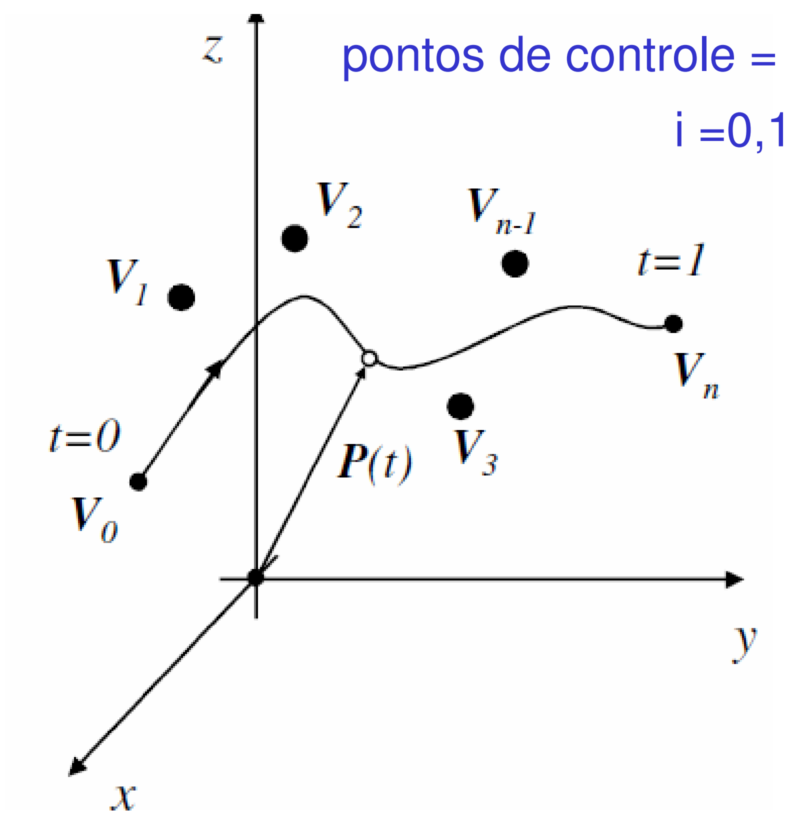
Curva de aproximação.

Controle global.

P. de Casteljau, 1959 (Citroën)
P. de Bézier, 1962 (Renault) - UNISURF
Forest 1970: Polinômios de Bernstein

Forma geral pode ter **n+1** pontos de controle, vamos chamar esses agora de V_i e *P(t)* os pontos da curva:

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\,\vec{V}_i$$



onde:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}\;t^i$$

pol. Bernstein

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

coef. binomial

Fatorial de um numero = ***n ! = n (n-1) 1***

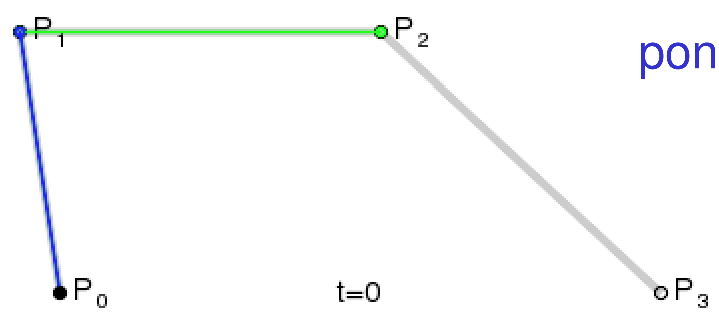
Como vimos na aula anterior

- As cúbicas são especialmente úteis

(porque mesmo ????)

(esqueceu?)

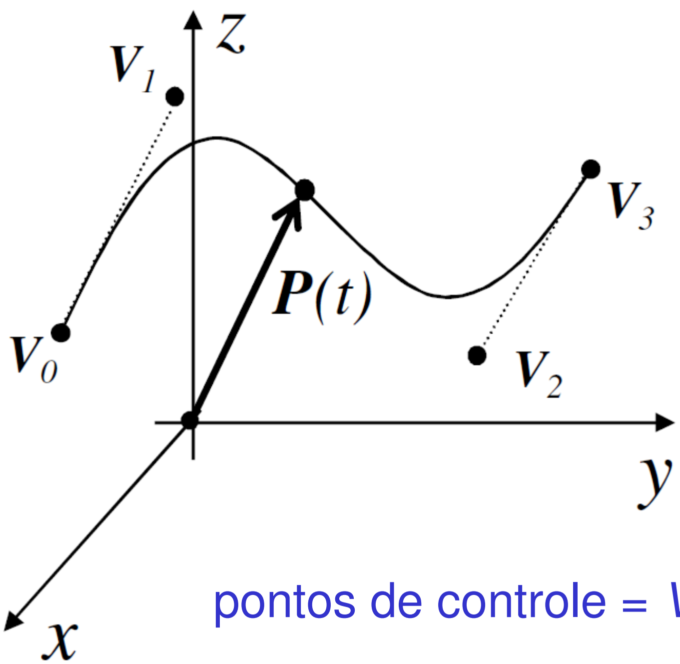
(Vai lá, na aula passada, ver....)



pontos de controle = *Pi*

Bezier cúbica:

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_{i,3}(t)\,\vec{V}_i$$



pontos de controle = *Vi*

$$B_{0,3}(t) = \binom{3}{0}(1-t)^{3-0}\,t^{0} = (1-t)^{3}$$

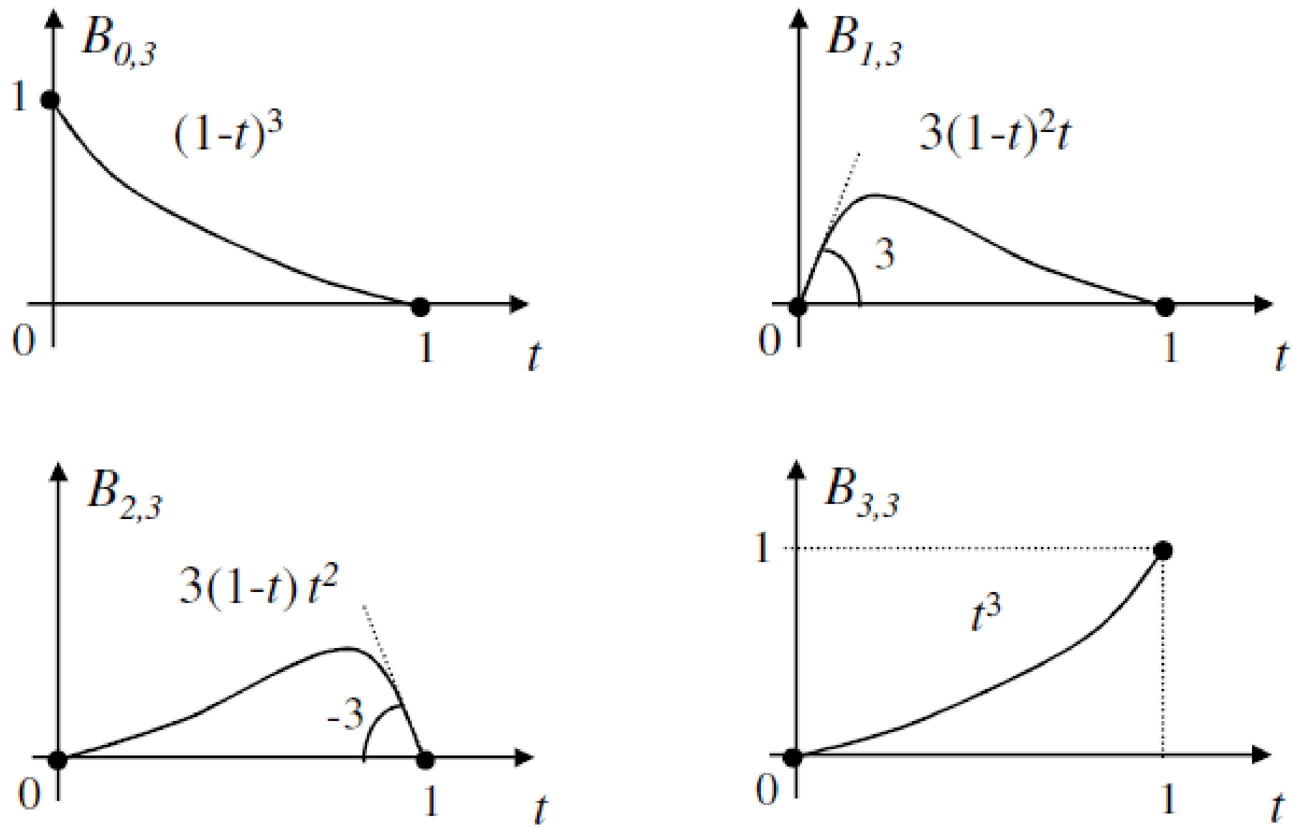
$$B_{1,3}(t) = \binom{3}{1}(1-t)^{3-1}\,t^{1} = 3(1-t)^{2}t$$

$$B_{2,3}(t) = \binom{3}{2}(1-t)^{3-2}\,t^{2} = 3(1-t)t^{2}$$

$$B_{3,3}(t) = \binom{3}{3}(1-t)^{3-3}\,t^{3} = t^{3}$$

$$\vec{P}(t) = (1-t)^{3}\,\vec{V}_0 + 3(1-t)^{2}t\,\vec{V}_1 + 3(1-t)t^{2}\,\vec{V}_2 + t^{3}\,\vec{V}_3$$

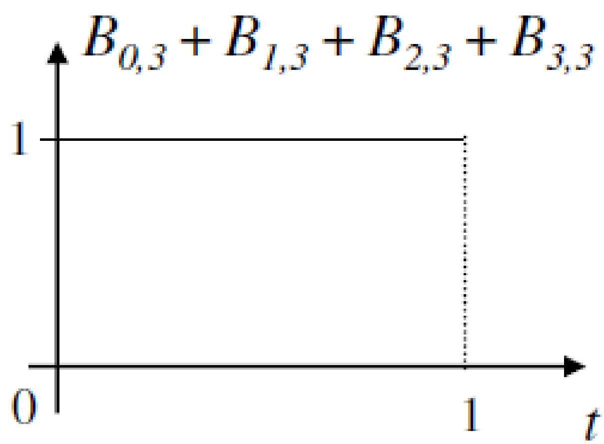
Polinômios cúbicos de **Bernstein**



A soma dos

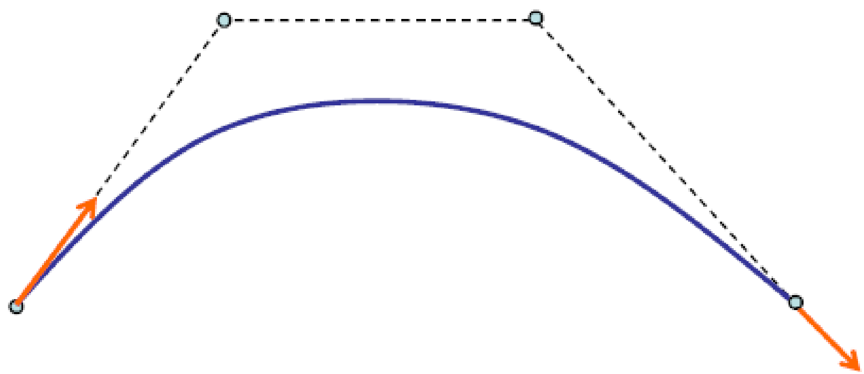
Polinômios Cúbicos de Bernstein

resulta:



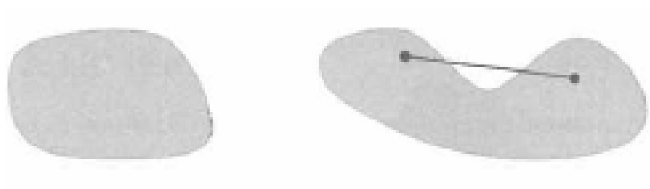
Propriedades de Curva de Bézier

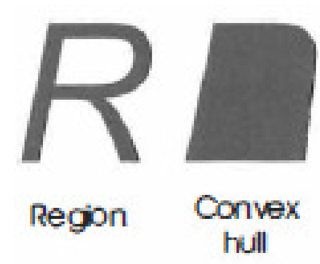
- Continuidade infinita (todas as derivadas são contínuas)
- O grau da curva (do polinômio) é dado pelo número de pontos do polígono de controle menos 1
- A curva de Bézier está contida no fecho convexo do polígono de controle
- A curva interpola o primeiro e último ponto do polígono de controle



Fecho convexo?

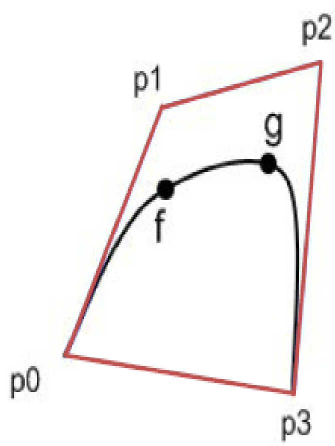
- Como se chamou isso na aula passada???

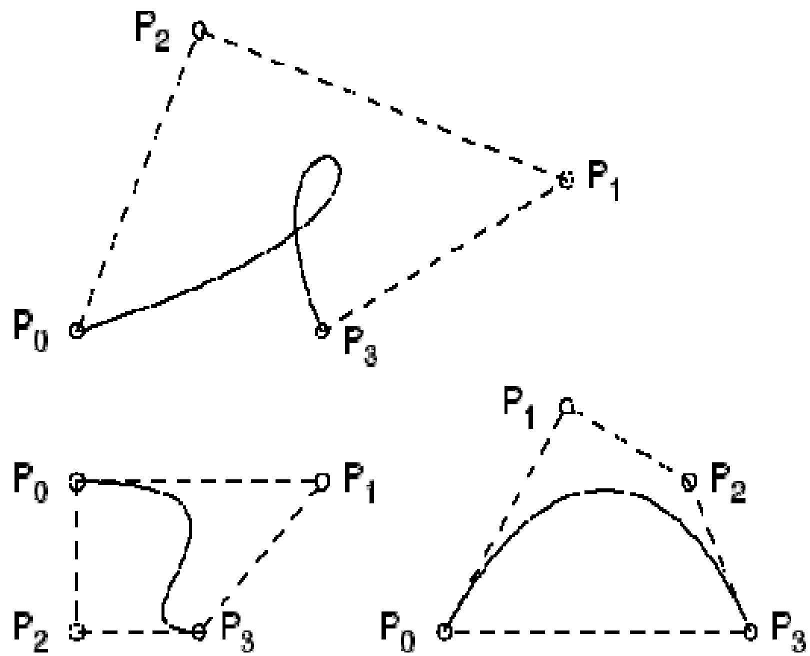




Propriedade: *Convex Hull*

– Uma curva de Bézier está completamente dentro do maior polígono convexo, formado pelos pontos de controle.



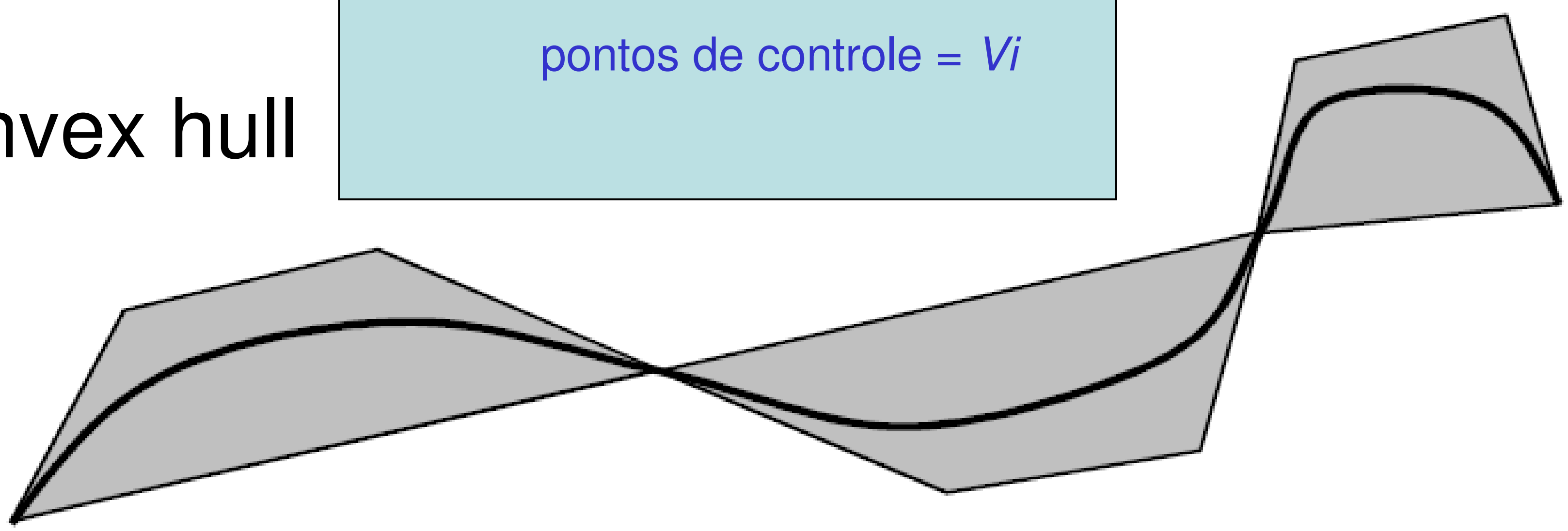


pontos de controle = *Pi*

E para muitas curvas para formar uma única como fica o Fecho convexo?

pontos de controle = *Vi*

Convex hull

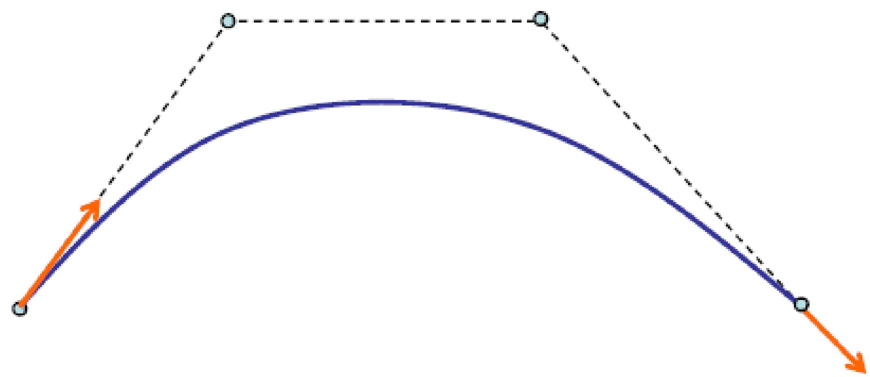


$$\vec{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \vec{V}_i \quad com \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$$

Cont.

pontos de controle = *Pi*

- As tangentes à curva em $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_n$ têm a direção dos segmentos de reta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_{n\text{-}1}\mathbf{p}_n$, respectivamente
  - Para cúbicas, as derivadas são $3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ e $3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$
- Transformar os pontos de controle (transf. afim) e desenhar a curva é equivalente a desenhar a curva transformada



Demonstrando essas propriedades para uma Bezier cúbica:

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3\,\vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t\,\vec{V}_1 + 3(1-t)t^2\,\vec{V}_2 + t^3\,\vec{V}_3$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(t) = -3(1-t)^2\,\vec{V}_0 + \left[-6(1-t)t + 3(1-t)^2\right]\vec{V}_1 + \left[-3t^2 + 6(1-t)t\right]\vec{V}_2 + t^3\,\vec{V}_3$$

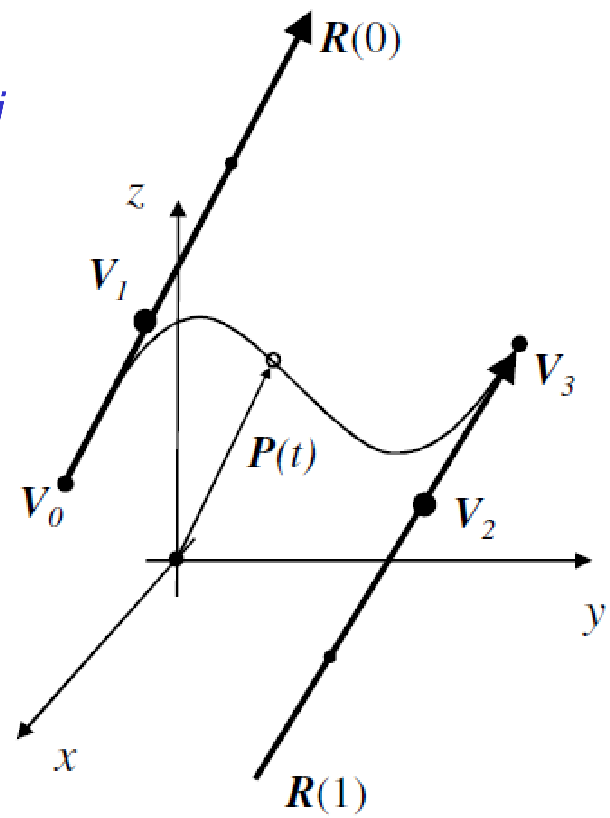
pontos de controle = *Vi*

$$\vec{P}(0) = \vec{V}_0$$

$$\vec{P}(1) = \vec{V}_3$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(0) = -3\,\vec{V}_0 + 3\,\vec{V}_1$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P}(1) = -3\,\vec{V}_2 + 3\,\vec{V}_3$$



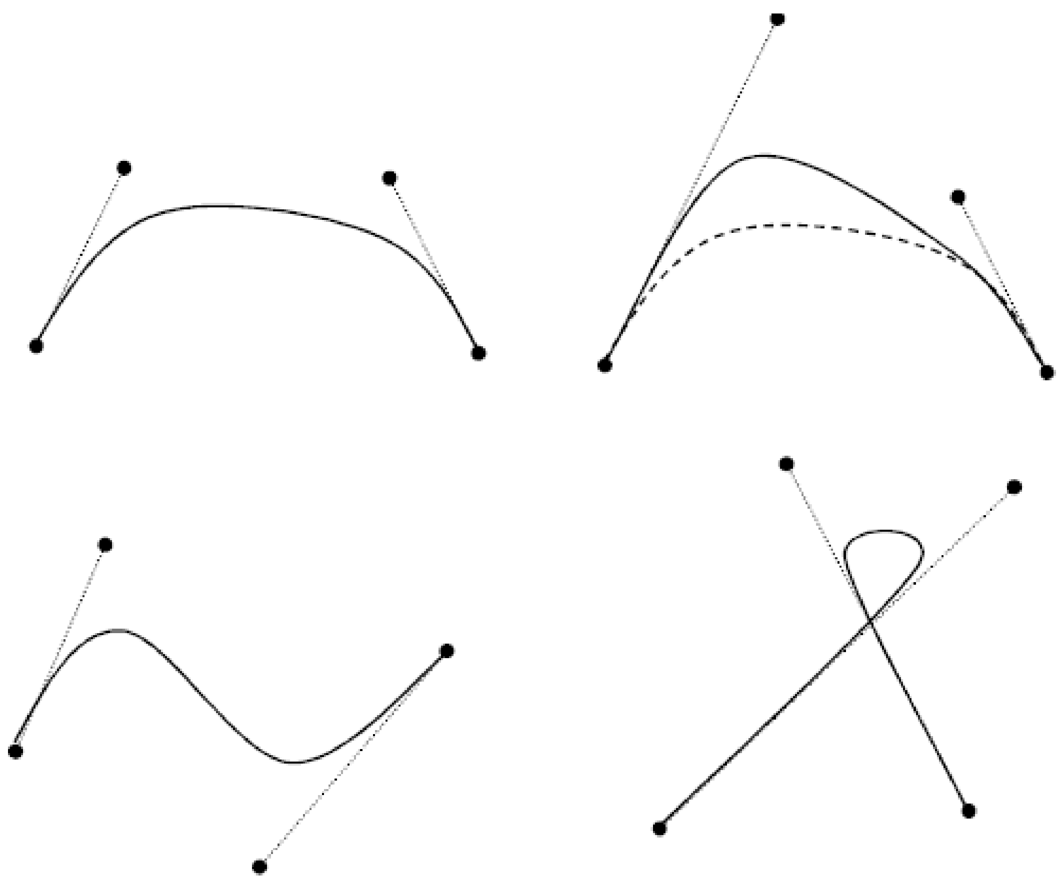
Se fosse pedido para reparametrizar de forma especial

- por exemplo com mais pontos onde a derivada da curva fosse maior, ou ela tivesse maior curvatura ?

- Com as expressões do slide anterior isso poderia ser feito!

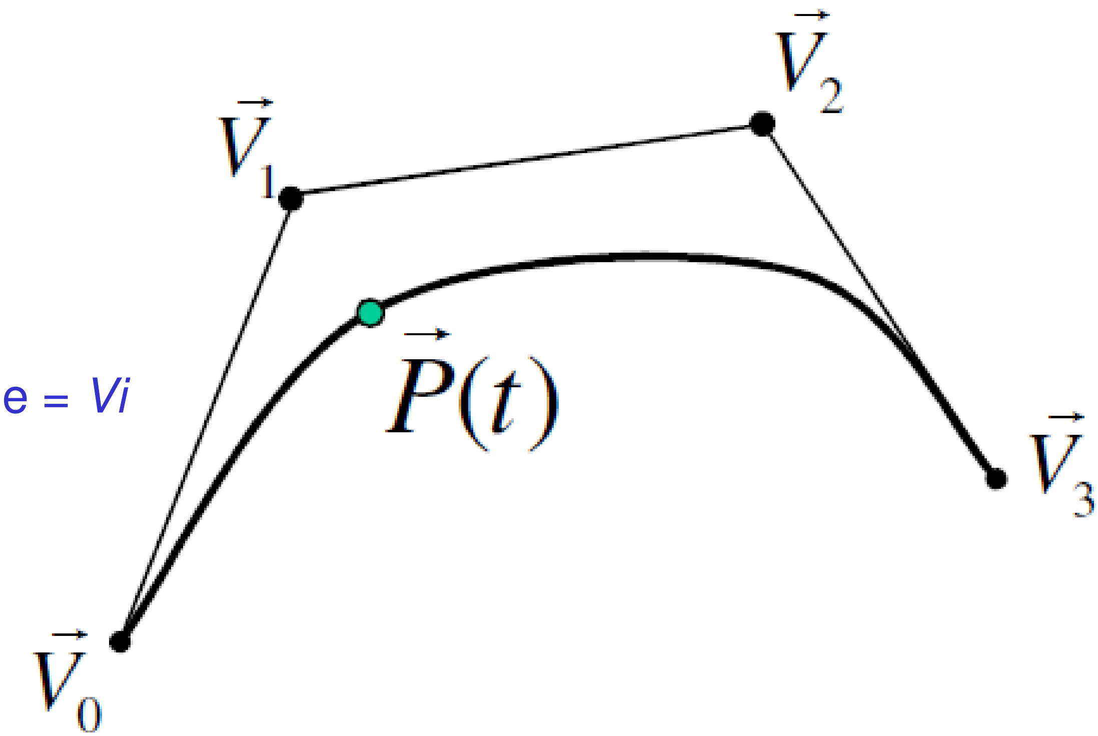
- (simples não??)

A ordem e posição dos pontos controla a curva!



Representação matricial :

pontos de controle = *Vi*



$$\vec{P}(t) = (1-t)^3\,\vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t\,\vec{V}_1 + 3(1-t)t^2\,\vec{V}_2 + t^3\,\vec{V}_3$$

$$\vec{P}(t) = \langle t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0x} & V_{0y} & V_{0z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{bmatrix}$$

- Matriz de Geometria (**G**) e Matriz Base (**M**)

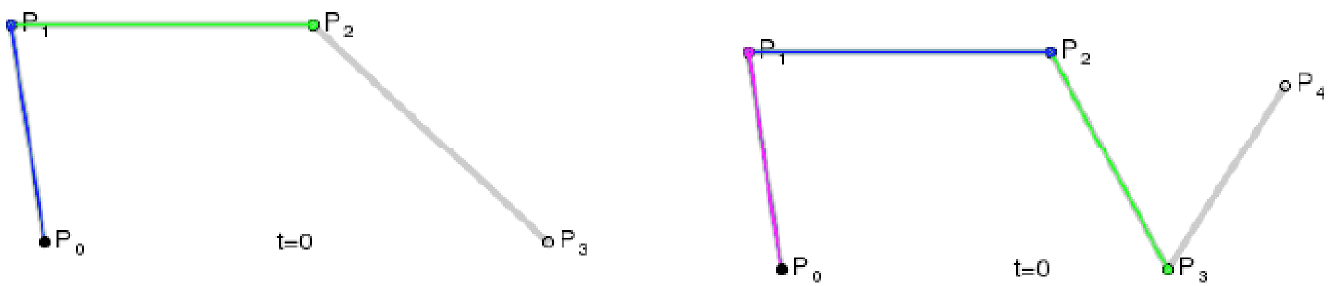
$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = TMG$$

pontos de controle = *Gi*

Outras formas de Bezier

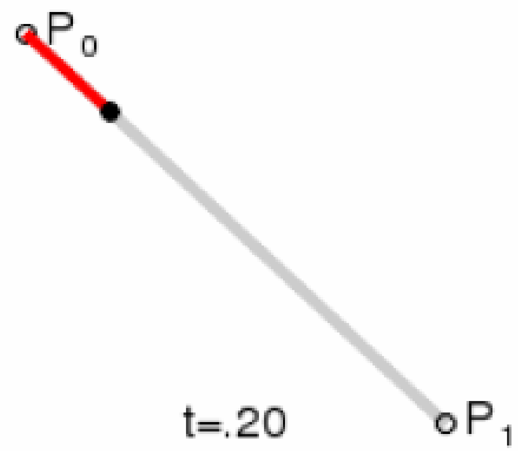
pontos de controle = *Pi*



Curvas de Bézier: 1. linear; 2. quadrática; 3. cúbica; 4. quártica.

Outras formas de Bezier

$$P(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$$

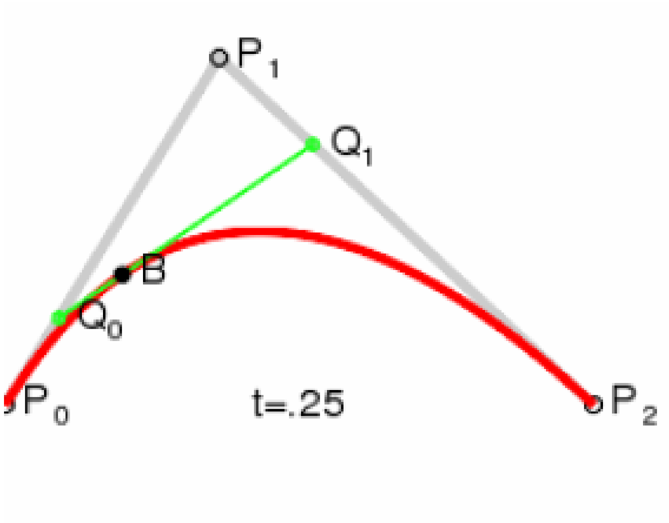


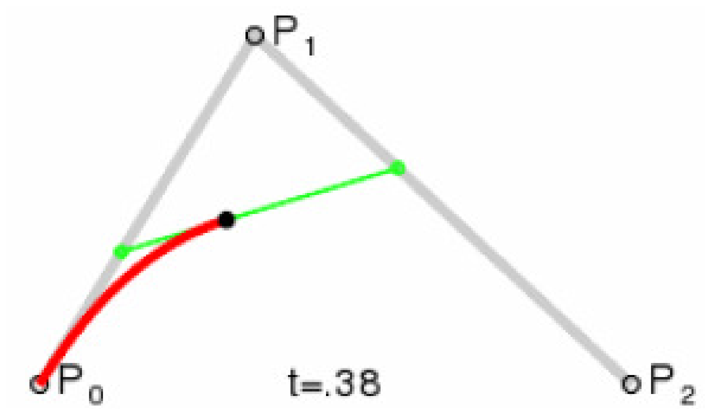
pontos de controle = *Pi*

Outras formas de Bezier

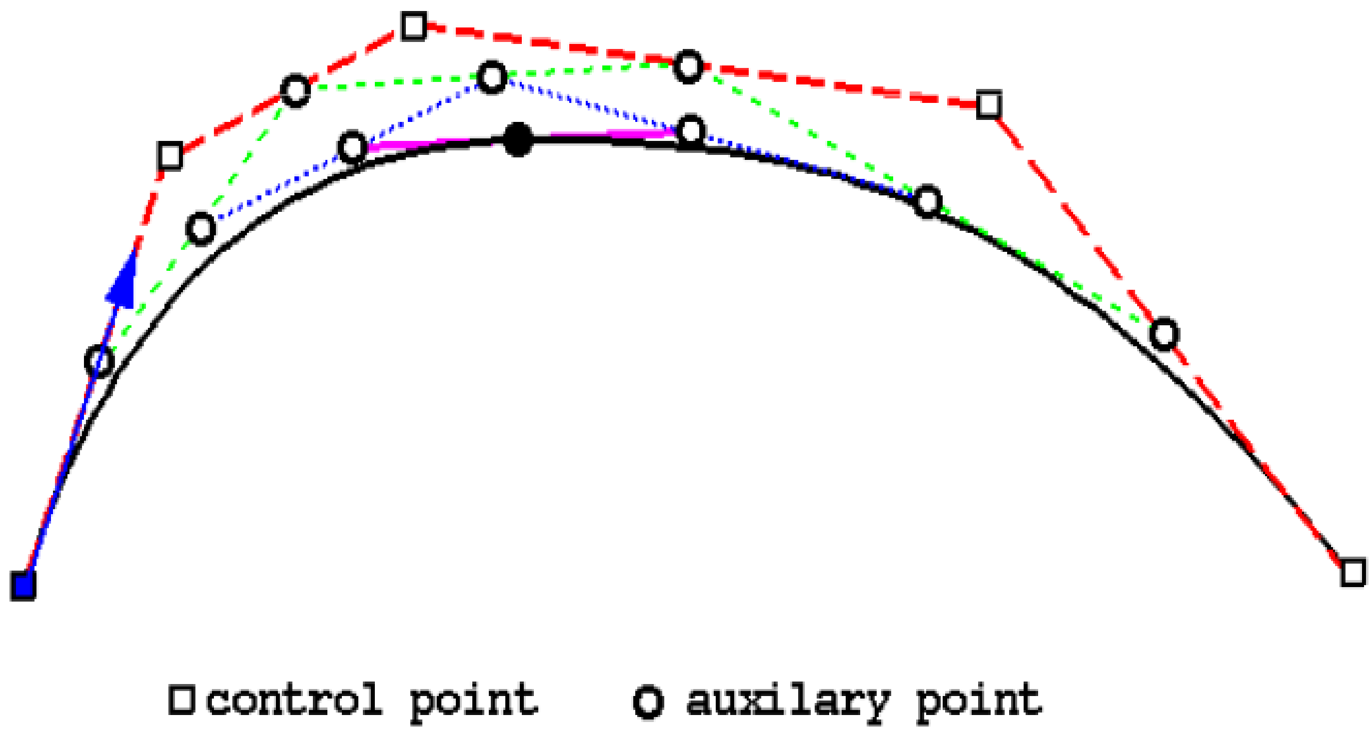
$$P(t) = (1-t)^2 \mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2 \mathbf{P}_2$$

pontos de controle = *Pi*



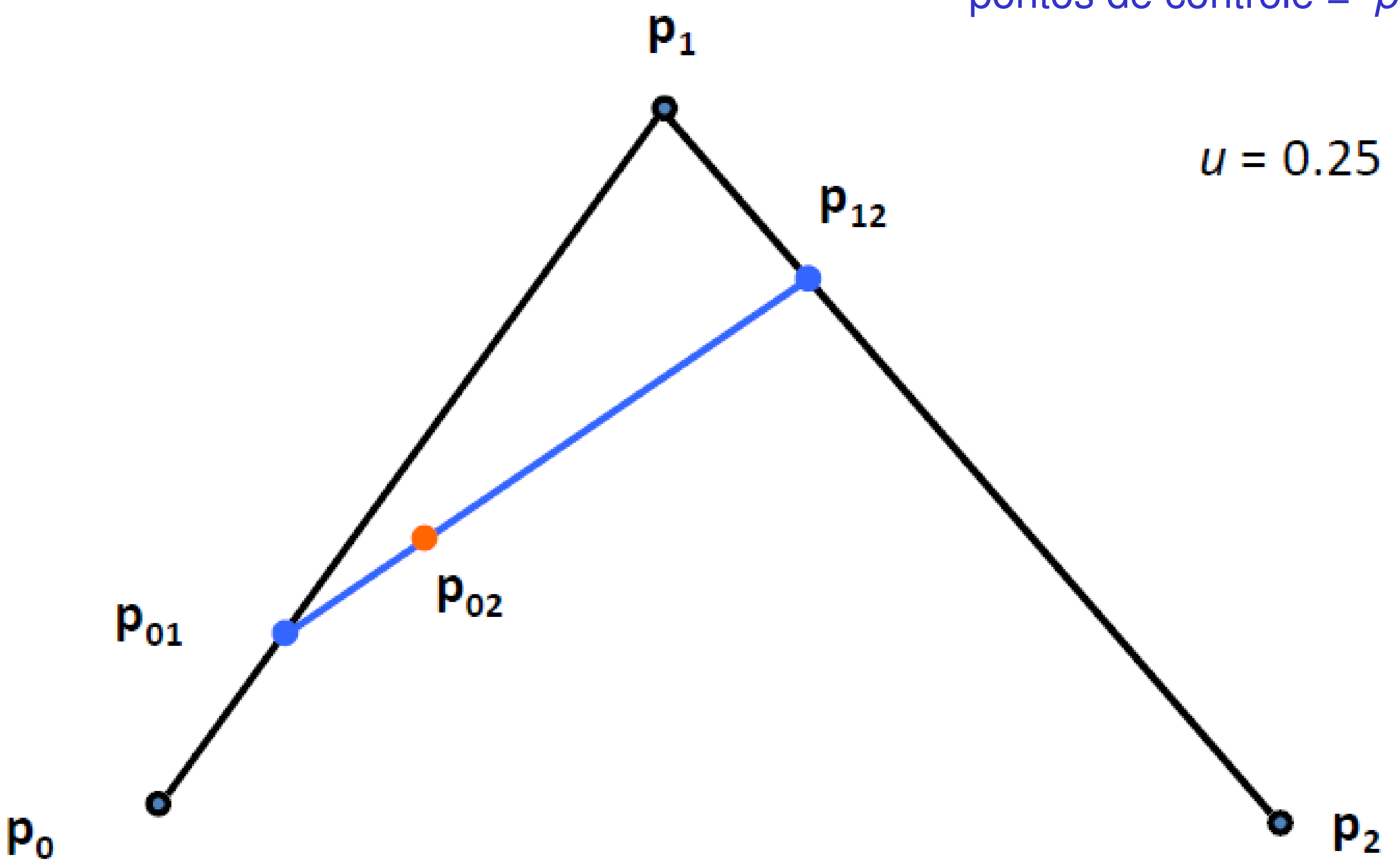


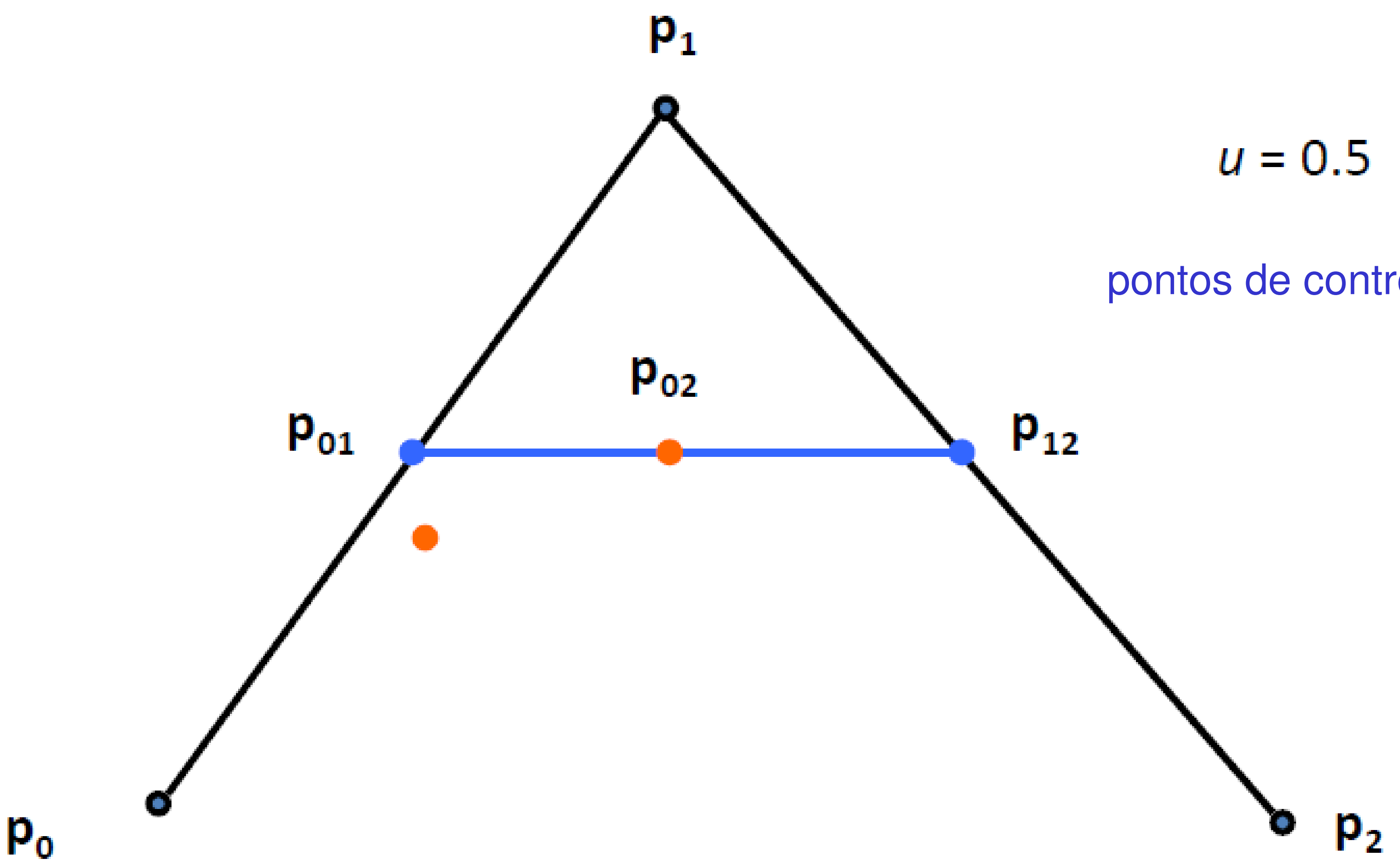
De Casteljau: algoritmo geométrico para construção de curvas Bézier.



Algoritmo geométrico

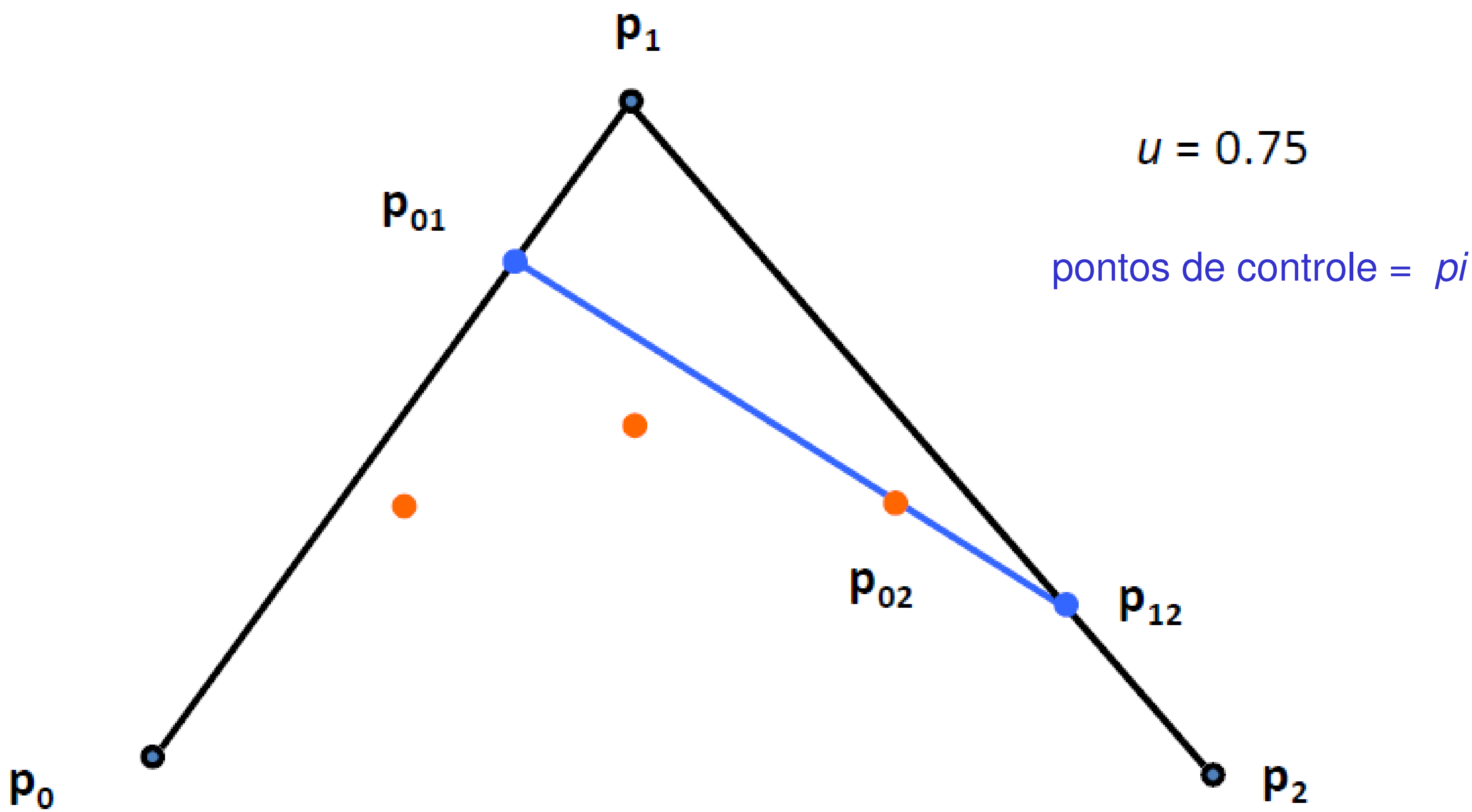
pontos de controle = *pi*

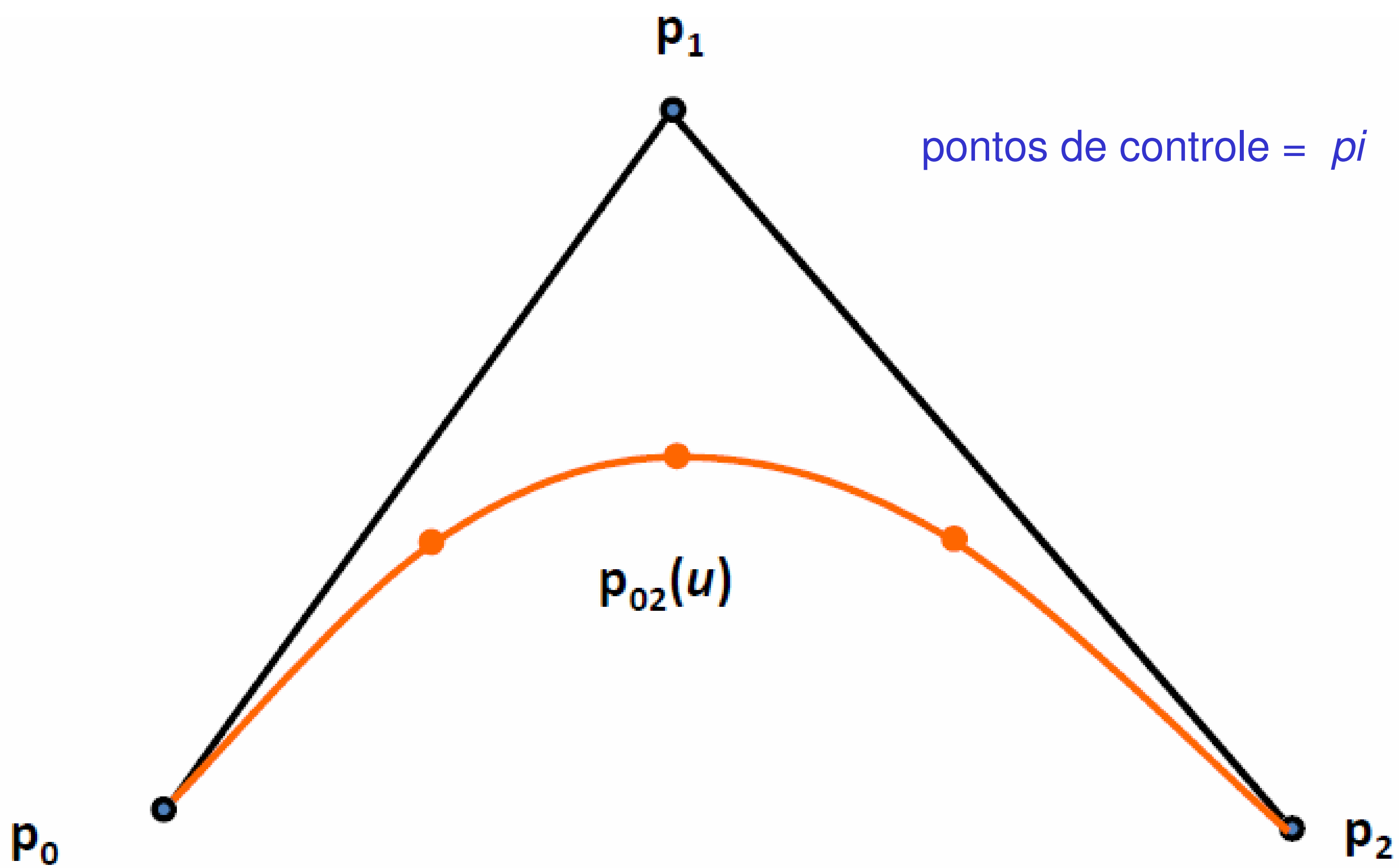




u = 0.5

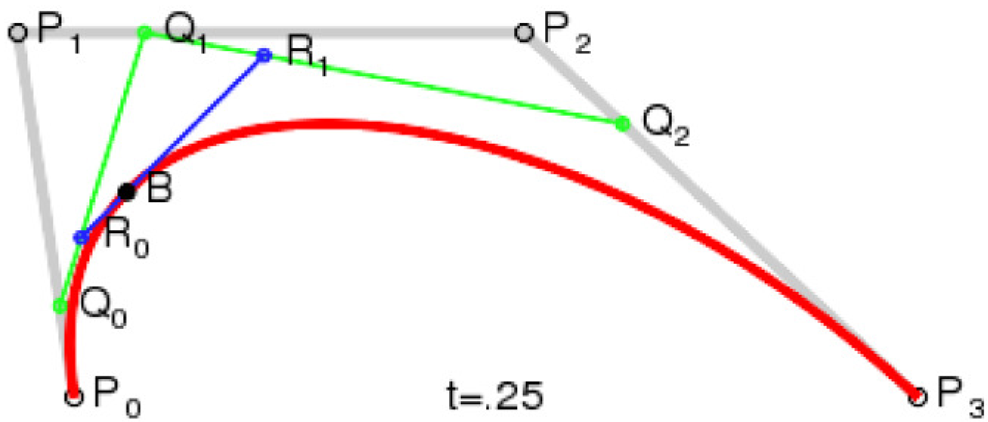
pontos de controle = *pi*


p_1
$u = 0.75$
p_{01}
pontos de controle = *pi*
p_{02}
p_{12}
p_0
p_2

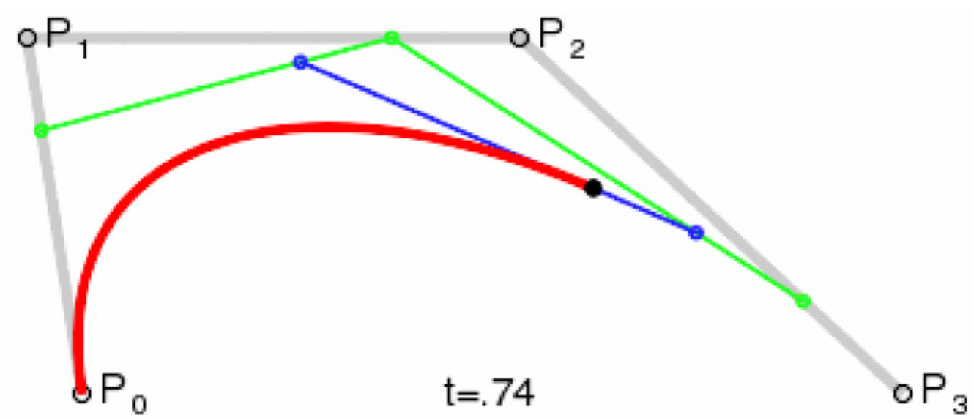

p1
pontos de controle = pi
p02(u)
p0
p2

Outras formas de Bezier

$$P(t) = (1-t)^3\,\mathbf{P}_0 + 3\,t\,(1-t)^2\,\mathbf{P}_1 + 3\,t^2\,(1-t)\,\mathbf{P}_2 + t^3\,\mathbf{P}_3$$



pontos de controle = *Pi*

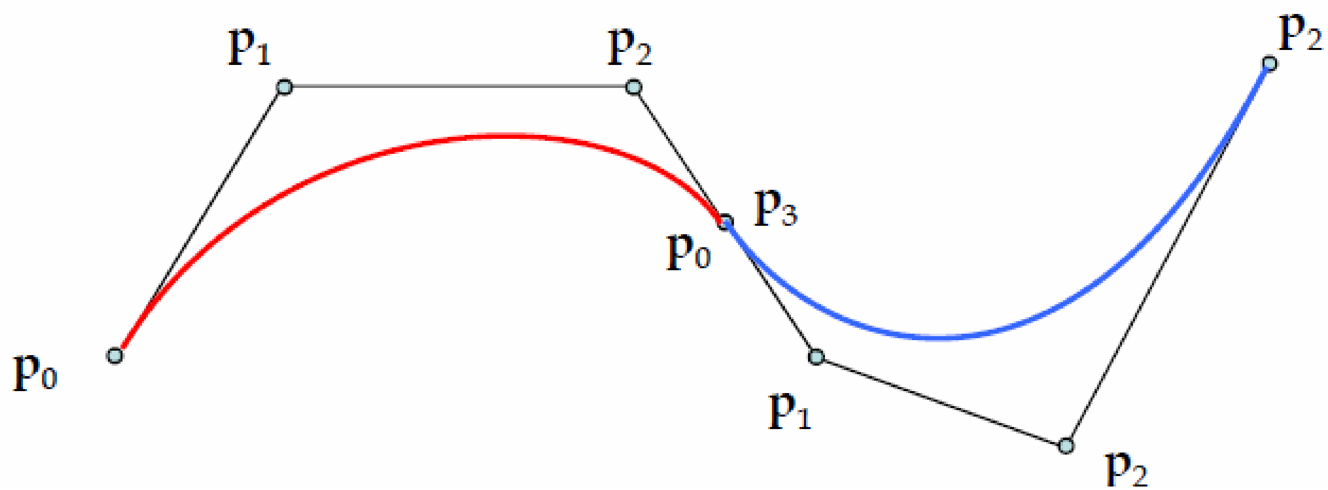


Cont.

- Curvas Bézier com *k* pontos de controle são de grau *k* – 1
- Curvas de grau alto são difíceis de desenhar
  - Complexas
  - Sujeitas a erros de precisão
- Normalmente, queremos que pontos de controle tenham efeito *local*
  - Em curvas Bézier, todos os pontos de controle têm efeito *global*
- Solução:
  - Emendar curvas polinomiais de grau baixo
  - Relaxar condições de continuidade

Emendando Curvas Bézier

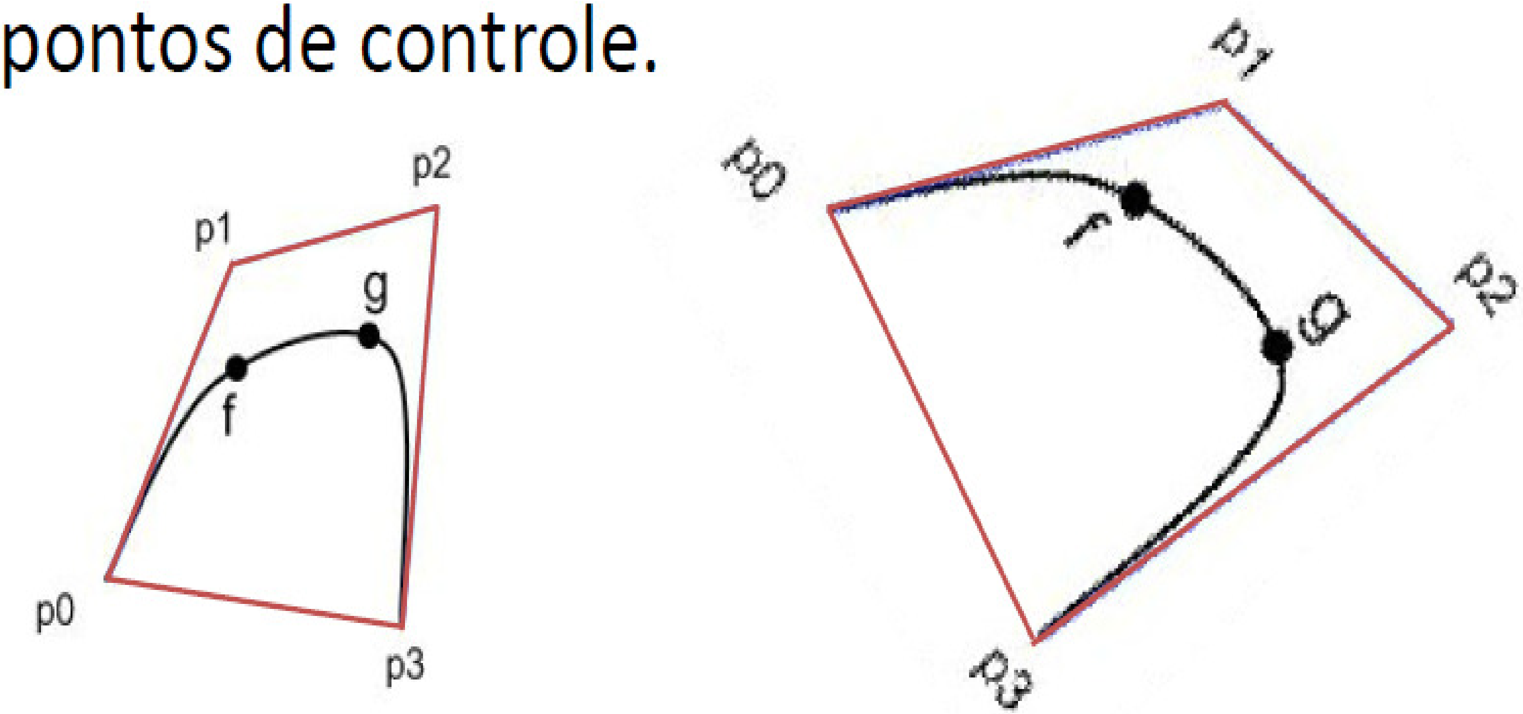
- Continuidade C^0: Último ponto da primeira = primeiro ponto da segunda
- Continuidade C^1: C^0 e segmento $\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$ da primeira com mesma direção e comprimento que o segmento $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ da segunda
- Continuidade C^2: C^1 e + restrições sobre pontos $\mathbf{p}_1$ da primeira e $\mathbf{p}_2$ da segunda



pontos de controle = *pi*

Transformações

– Executar as transformações (S,R,T) na curva é equivalente a realizar as transformações nos pontos de controle.



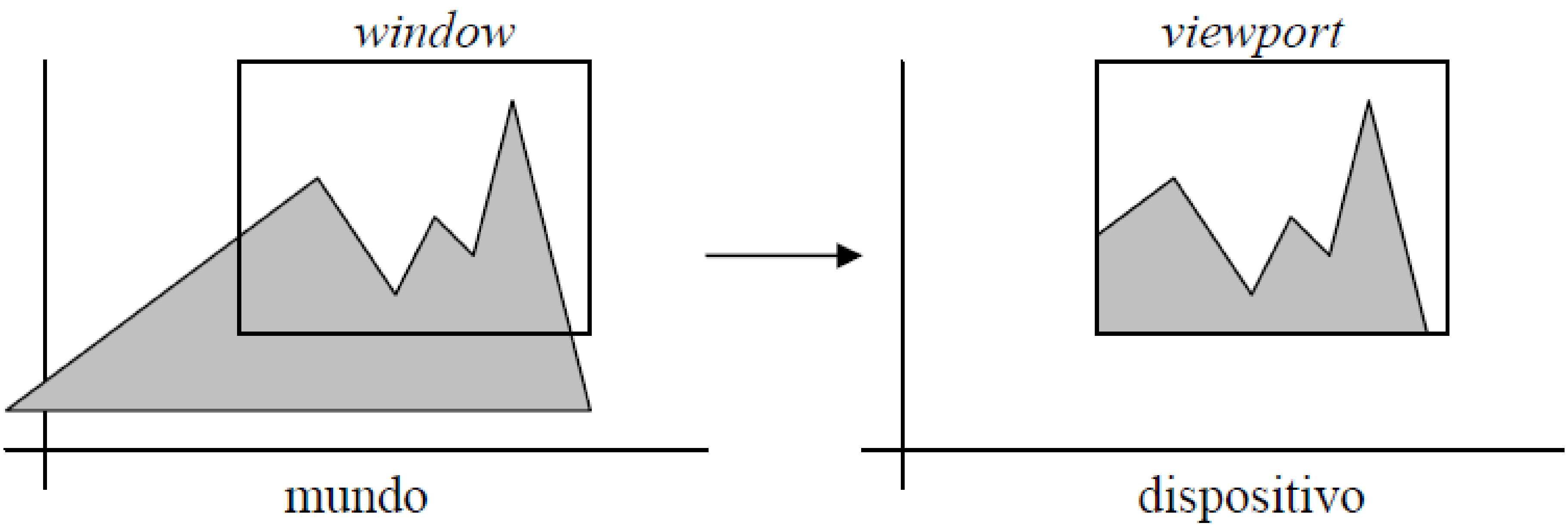
pontos de controle = *pi*

Lembrando que:

Window→ área selecionada do sistema de coordenadas do mundo para ser exibida no display (área que será vista). Deve-se observar que nem toda área de um ambiente pode ser exibida em uma única *window*. Esta área é determinada pela configuração e posicionamento da câmera sintética.

Viewport→ área do display (monitor) na qual a *window* é mapeada. Corresponde a posição na tela onde mostrar. Ex: janela gráfica de uma aplicação gráfica.

Viewing transformation (ou *windowing transformation*)→ mapeamento de uma parte da cena em coordenadas do mundo para coordenadas do dispositivo.



O usuário

- Definirá os pontos iniciais finais e os intermediários nas coordenadas dele
- A curva de Bezier pode ser desenhada no trabalho, agora!!

Como faço isso???

Socorro!!

De muitas maneiras!!!

Por exemplo:

$$\vec{P}(t) = (1-t)^3\,\vec{V}_0 + 3(1-t)^2 t\,\vec{V}_1 + 3(1-t)t^2\,\vec{V}_2 + t^3\,\vec{V}_3$$

Etc....