

[http://www.tutorialspoint.com/computer\\_graphics/computer\\_graphics\\_curves.htm](http://www.tutorialspoint.com/computer_graphics/computer_graphics_curves.htm)

## Aula 4

2016/2

Porque as curvas em CG são especiais?



## Peculiaridades das curvas em CG

Para CG, representações paramétricas costumam ser as mais convenientes

Assim, genericamente, uma curva 3D é

$$- Q(t)=[x(t) \ y(t) \ z(t)]$$

$x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  são chamadas de funções-base  
(*base functions*)

$P(u) = (X(u), Y(u), Z(u)) \Rightarrow$  curvas em CG

$$0 \leq u \leq 1$$

$P(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \Rightarrow$  superfícies em CG

$$0 \leq u \leq 1$$

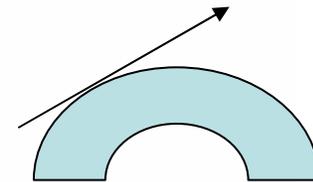
$$0 \leq v \leq 1$$

É positivo nas paramétricas:

- As expressões paramétricas suportam declives infinitos, curvas fechadas ou multi-valor.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/du}{dx/du} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{infinito} \Rightarrow dx/du = 0$$



- Elementos geométricos definidos parametricamente são inerentemente limitados ( $0 \leq u \leq 1$ ).
- As expressões paramétricas são facilmente traduzidas na forma de vectores e matrizes.
  - Elas permitem a:
  - Utilização de um só modelo matemático para representar qualquer curva ou superfície.

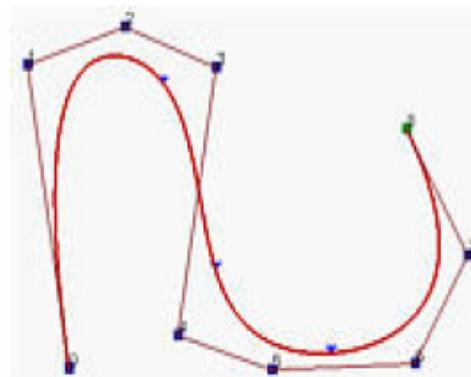
# Peculiaridades das curvas em CG

A curva é definida através de um conjunto de **pontos de controle** que influenciam a forma da curva.

Os nós são pontos de controle que pertencem à curva.

A curva pode ser interpolada, passando nesse caso por todos os pontos de controle, ou pode ser aproximada, passando apenas em alguns pontos de controle ou mesmo nenhum.

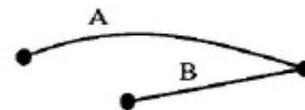
Os pontos de controle definem a fronteira de um polígono designado por *convex hull*.



as funções de base devem  
permitir que os desenhos tenham

## Continuidade

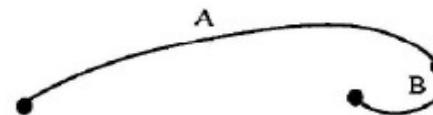
- Duas ou mais curvas nos nós (conectando pontos) para formar uma curva contínua
- Tipos de continuidade
  - Continuidade de ponto
  - Continuidade de tangente
  - Continuidade de curvatura



(a) Point continuity -  $C^0$



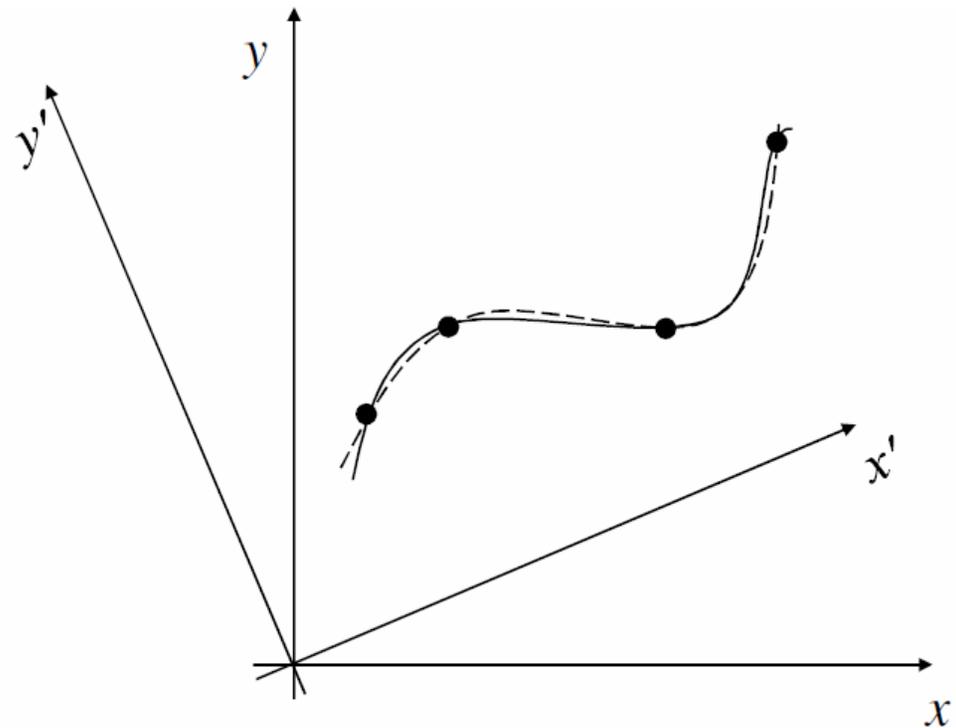
(b) Tangent continuity -  $C^1$



(c) Curvature continuity -  $C^2$

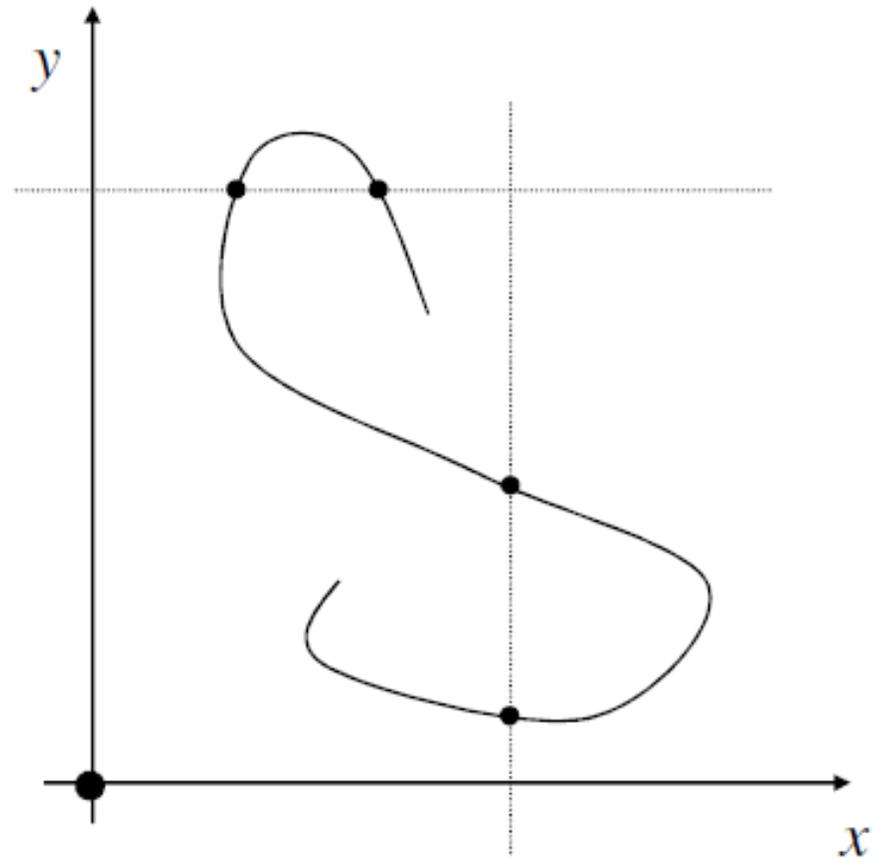
# Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Independência  
dos  
eixos  
usados



# Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Deve  
poder  
ter  
Pontos  
com  
coordenadas  
Múltiplas em  $x$   
ou  $y$



# Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Devem ter uso

**intuitivo** e

poder ter

**Controle local:**

i.e. possibilitar

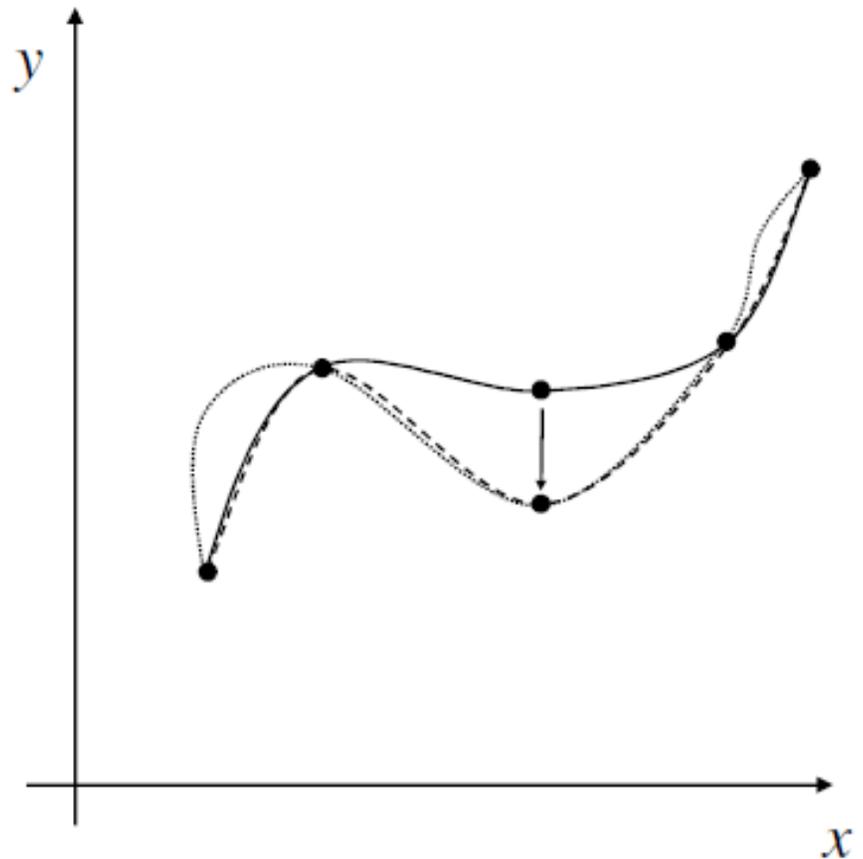
haverem **ajustes**

**finos** (e.g. ao se

alterar um trecho

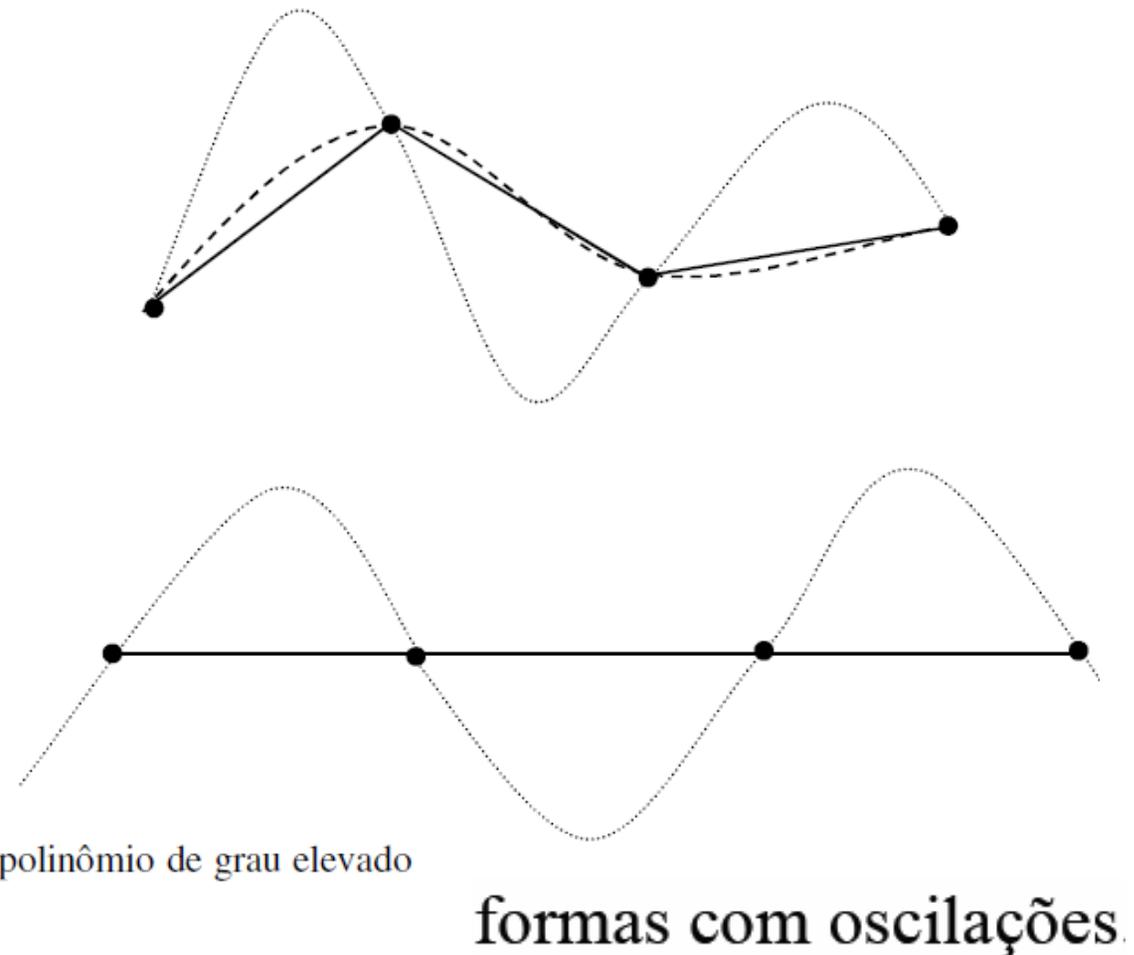
não altera toda a

curva)



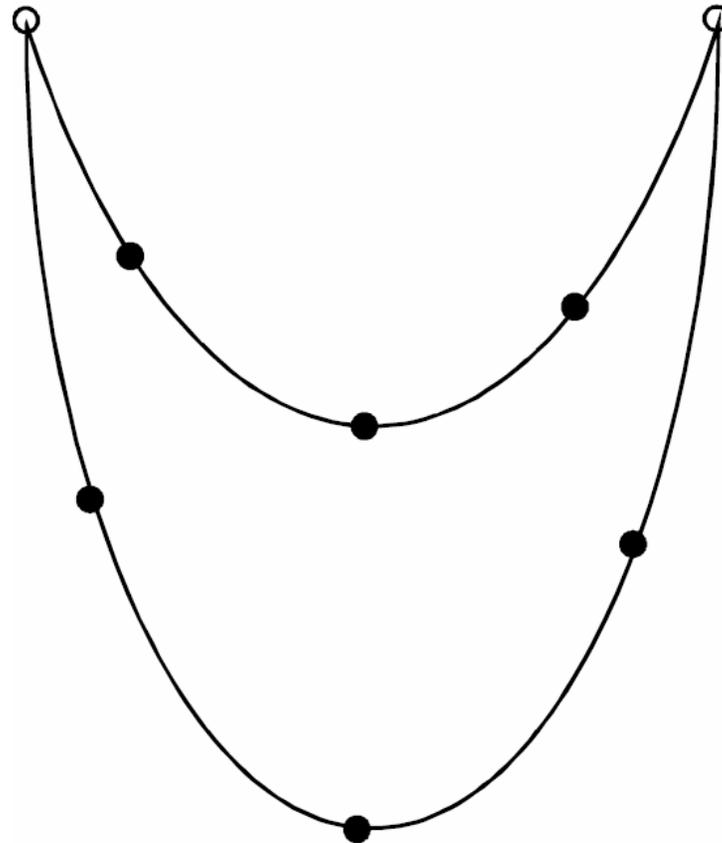
# Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

- O número de pontos de **Controle local** não deve estar associado **ao grau da curva** ou sua **oscilação**



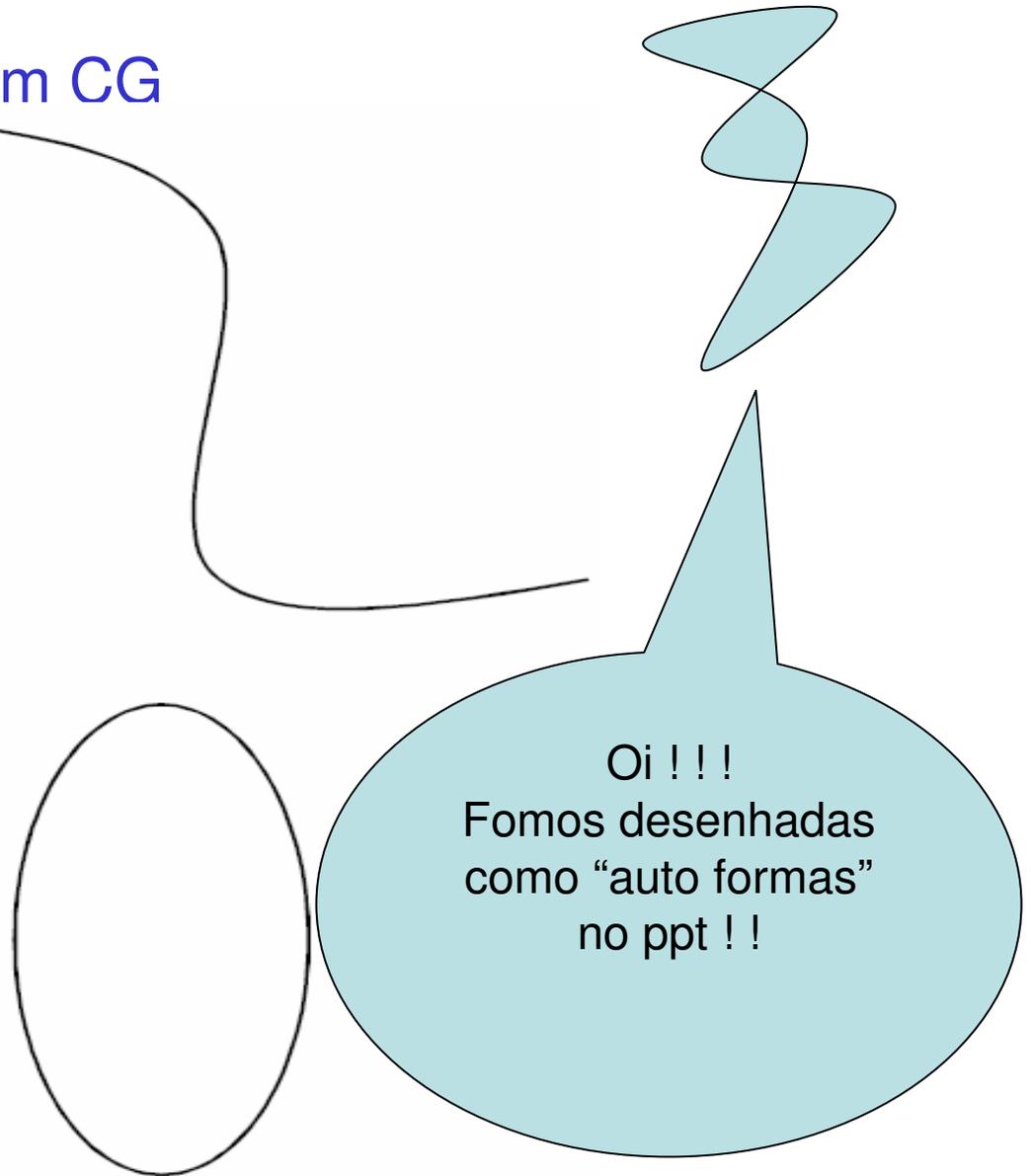
# Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

- Ser possível representar diversos graus de **continuidades** que o usuário desejar



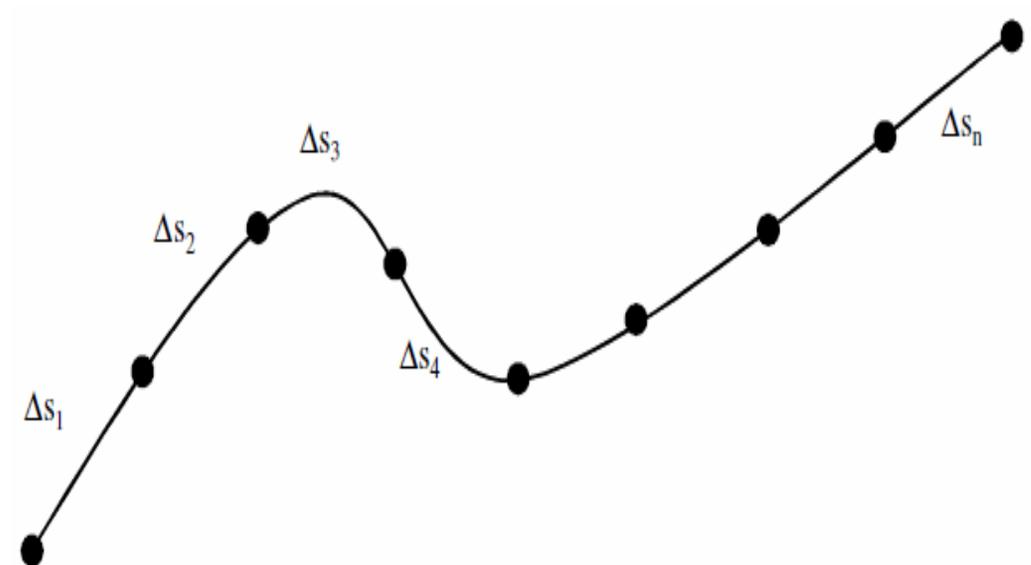
## Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

- Ser possível representar curvas abertas, fechadas, com pontos de inflexão, etc. : ter a **versatilidade** que o usuário desejar



## Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

ter pontos  
com distâncias  $\approx$   
constantes ao longo do  
seu  
comprimento =  
parâmetro  
uniformemente  
distribuídos.



$$\Delta s_i \approx \Delta s_j$$

# Solução desenvolvida para em CG

Curvas de formas livres

Representadas por uniões

Descritas por polinômios

Parametrizados

Até o grau 3

Com continuidade paramétrica

# Porque polinômios até terceiro grau?

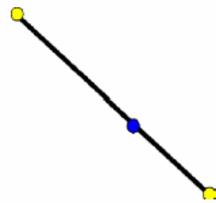
Quanto mais simples a equação da função de interpolação, mais rápida sua avaliação.

Polinômios são fáceis de avaliar

Grau menor que 3: Pouca flexibilidade.

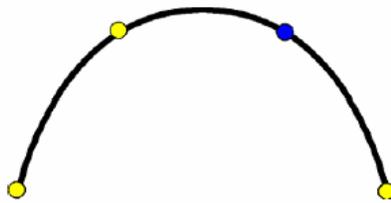
Grau maior que 3: Maior custo computacional com pouca vantagem prática.

$$f(t) = at + b$$



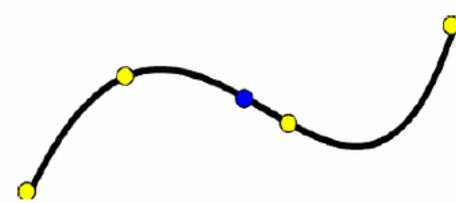
Linear

$$f(t) = at^2 + bt + c$$



Quadrático

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



Cúbico

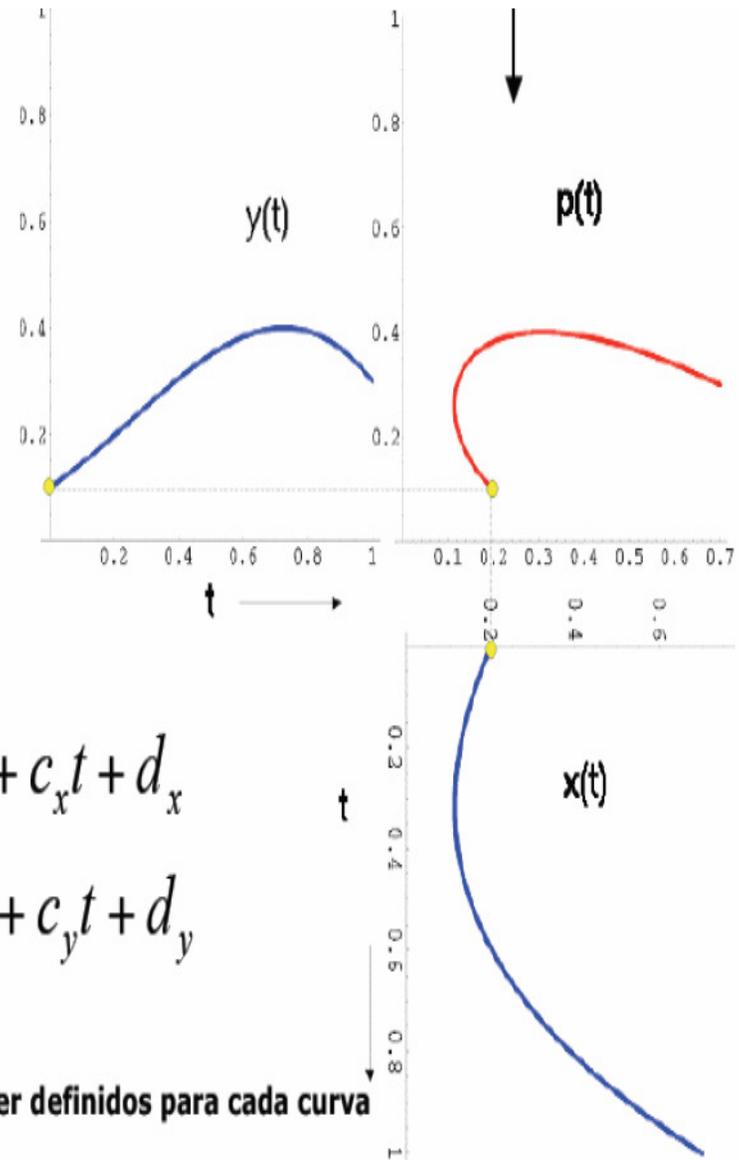
# Curvas Paramétricas Cúbicas 2D

8 parâmetros  
para cada curva

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

Os valores de  $a_x, b_x$ , etc devem ser definidos para cada curva



Curva polinomial paramétrica:

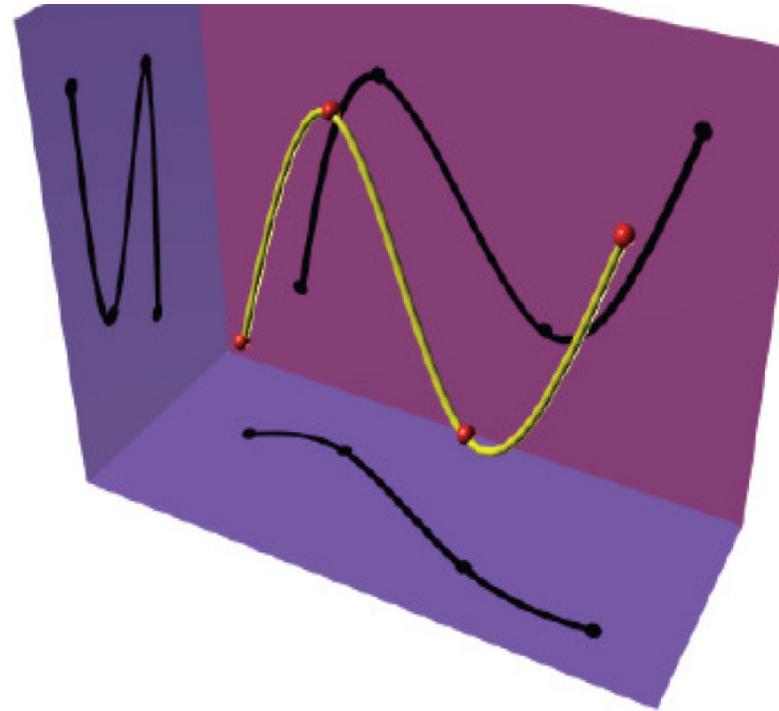
$$P(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \dots + c_ku^k$$

Em 3D

$$\begin{cases} x(u) = c_{0x} + c_{1x}u + c_{2x}u^2 + \dots + c_{kx}u^k \\ y(u) = c_{0y} + c_{1y}u + c_{2y}u^2 + \dots + c_{ky}u^k \\ z(u) = c_{0z} + c_{1z}u + c_{2z}u^2 + \dots + c_{kz}u^k \end{cases}$$

# Em 3D

12 parâmetros  
para cada curva



$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

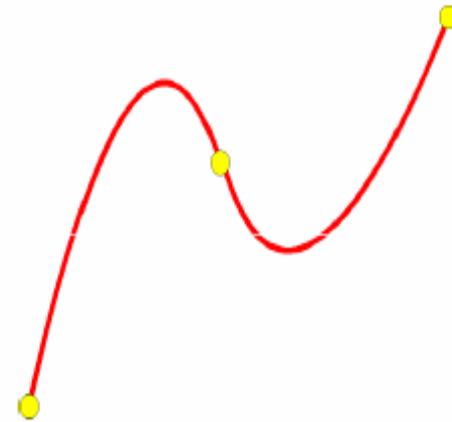
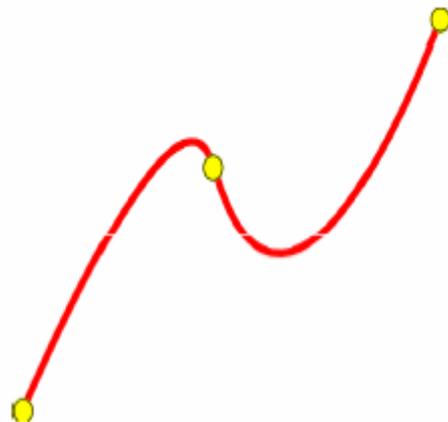
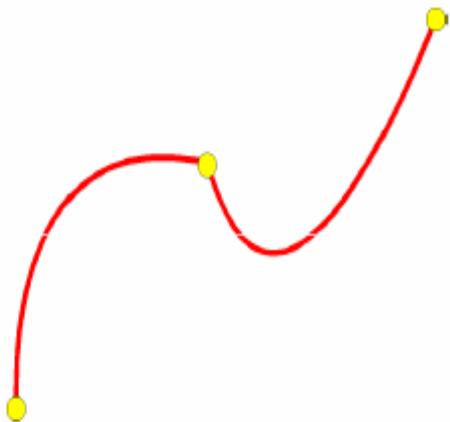
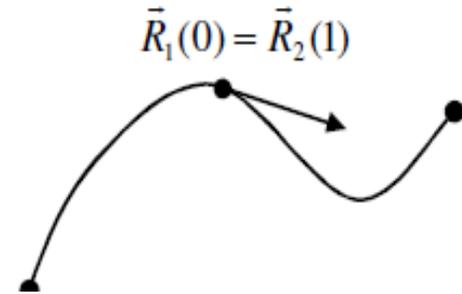
# De forma genérica

$$p(u) = c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 = \sum_{k=0}^3 c_k u^k$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} c_{kx} \\ c_{ky} \\ c_{kz} \end{bmatrix}$$

# Graus de Continuidade geométrica

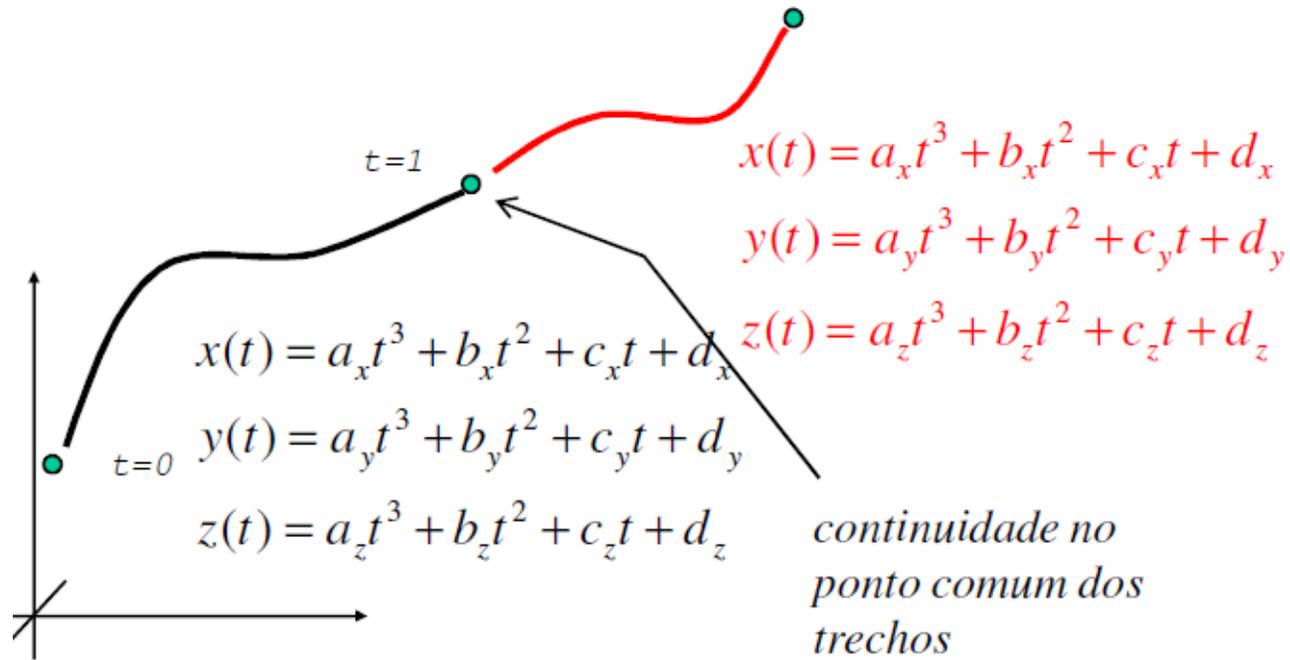


Dois segmentos se encontram em um ponto

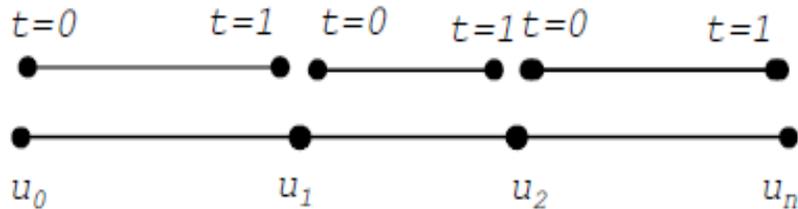
**Direção** das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção

**Direção e magnitude** das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção

# Com continuidade paramétrica



Parametrização



$t \in [0,1]$  local

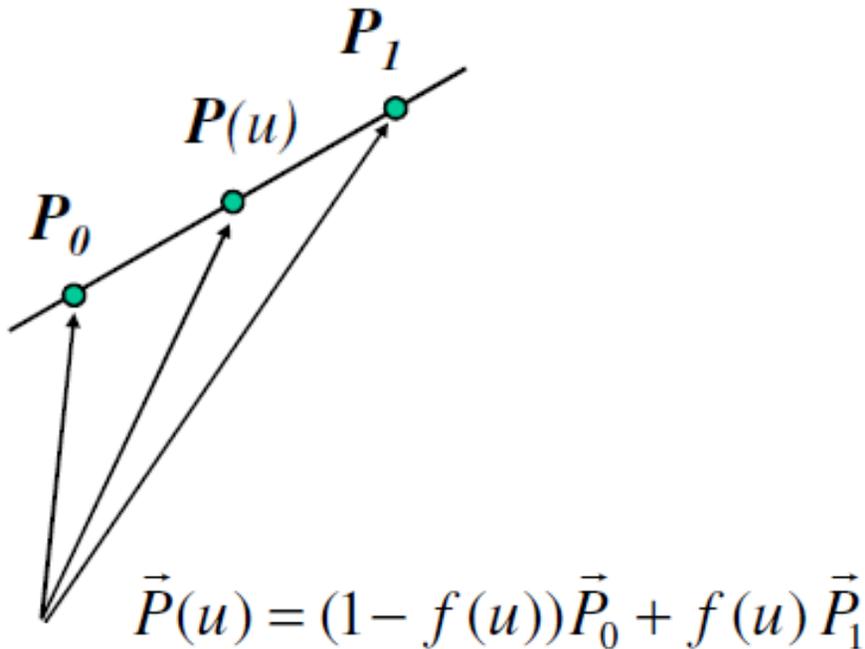
ou

$u \in [u_0, u_n]$  global

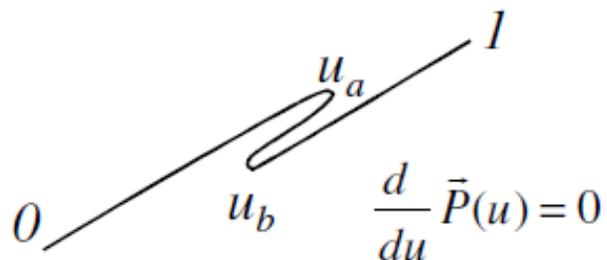
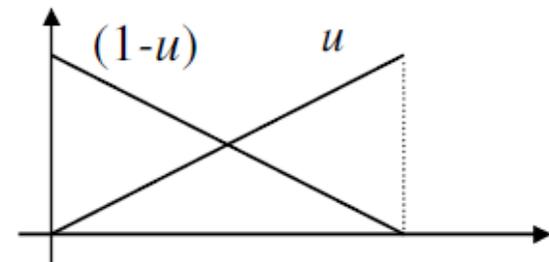
# Requisitos para os parâmetros:

Parâmetro genérico:  $u$

Parâmetro de comprimento:  $s = s(u)$



$$\vec{P}(u) = (1-u)\vec{P}_0 + u\vec{P}_1$$



Com continuidade paramétrica  
 Se  $u_2 > u_1 \Rightarrow s(u_2) > s(u_1)$

# Vamos então passar

Para as expressões das curvas 2D que usaremos em nosso trabalho 1, mas antes, você já fez o “comentado” até aqui? Tem alguma dúvida?

Lembre que o mais **importante** é ter uma solução nova, só sua !!

Não copie a solução de lugar algum de colegas ou da internet !

Há muitas “ferramentas” que descobrem de onde voce copiou facilmente !

Não aceitaremos texto ou trabalho iguais a outros.  
Algo com índice de similaridade maior que 10%:  
nem será corrigido!  
= Nota Zero!

The screenshot displays the iThenticate web interface. The main document being analyzed is titled "thyloid" by AURA C. The overall similarity score is 21%. A "Match Breakdown" panel on the right lists the following sources:

Source	Words	Similarity
Internet (www2.ic.uff.br)	324	5%
Internet (www2.ic.uff.br)	324	5%
CrossCheck (Maintz, J. "A survey of medical image registration", Medical Image Analysis, 199803)	106	2%
Internet (mips.stanford.edu)	106	2%
Internet (people.cs.uu.nl)	73	1%

The document text includes a section on "Registration" which states: "Image registration can be defined as a special mapping of points between two images, where one is usually called reference or fixed image and the other is usually called sensible or moving image. Registration is an optimization problem where the goal is to maximize the correspondence of points from the reference image to the ones in the sensible using transformations [1]. Figure 3 shows an overall example of a performed registration. It is possible to suppose that the perfect registration or transformation  $T$  is achieved when the statement  $T(\text{SensibleImage}) \cong \text{ReferenceImage}$  is true. The symbol  $\cong$  represents an approximation and is subjective. The comparison depends on the similarity measure chosen to compare the reference and transformed images. After the transformation is done, the