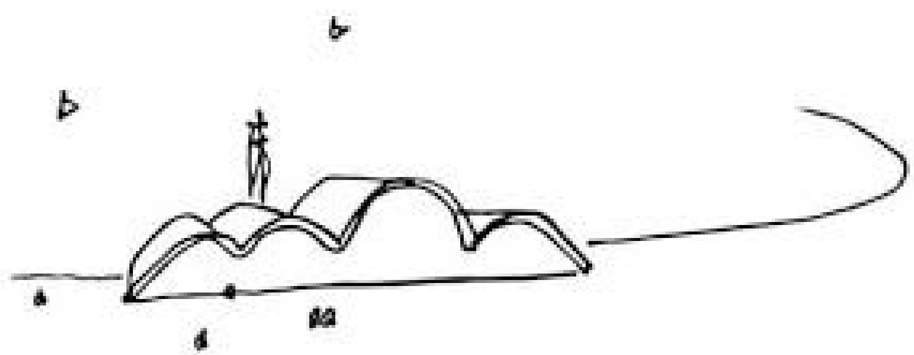
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap3.html

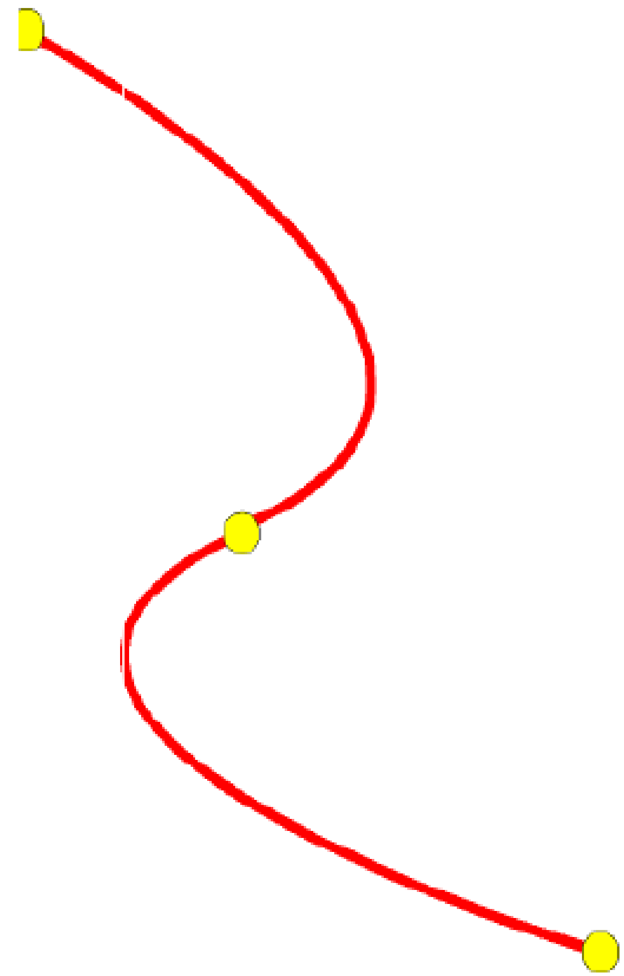


Aula 2

Curvas e Superfícies
2016/2 – IC / UFF

Elementos 1D

- Comprimento
- Distância ao inicio define a posição na curva
- Mas ela pode ser 2D e 3D



Curvas

- Formas de representação:
  - Procedural (não tem equação apenas algoritmo de geração: exemplo *curvas fractais*)
  - Conjunto de pontos (digitalizados: x_i , y_i)
  - Por equações (analíticas):
    - Explicita : $y = f(x)$
    - Implícita : $x+y=0$
    - Paramétrica : $x= f(t)$, $y = f(t)$

Também podem ser

Classificadas de acordo com seus termos: linear (grau 1), quadrática (grau 2), cúbica (grau 3), transcendental (sin, cos, log, ...)

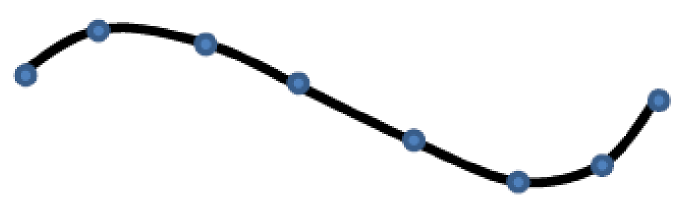
Representação analítica

- Não paramétrica e paramétrica
- Precisão sobre representação de ponto
- Armazenamento compacto
  - Centro do círculo e raio vs. pontos
- Ponto intermediário
  - Quaisquer pontos sobre a curva podem ser calculados
- Mais fácil gerar desenhos
- Mais fácil mudar a curvatura

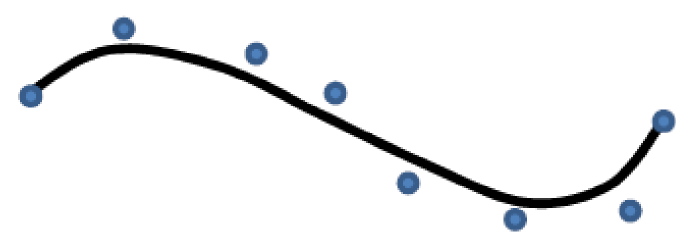
Representação analítica de curva definida por ponto

- Interpolação
  - Analiticamente definindo uma curva a partir de um conjunto de pontos conhecido
- Ajustada
  - Uma curva que passa por todos os pontos conhecidos
- Satisfatória
  - Uma curva que passa perto de pontos conhecidos

Interpolação X Aproximação

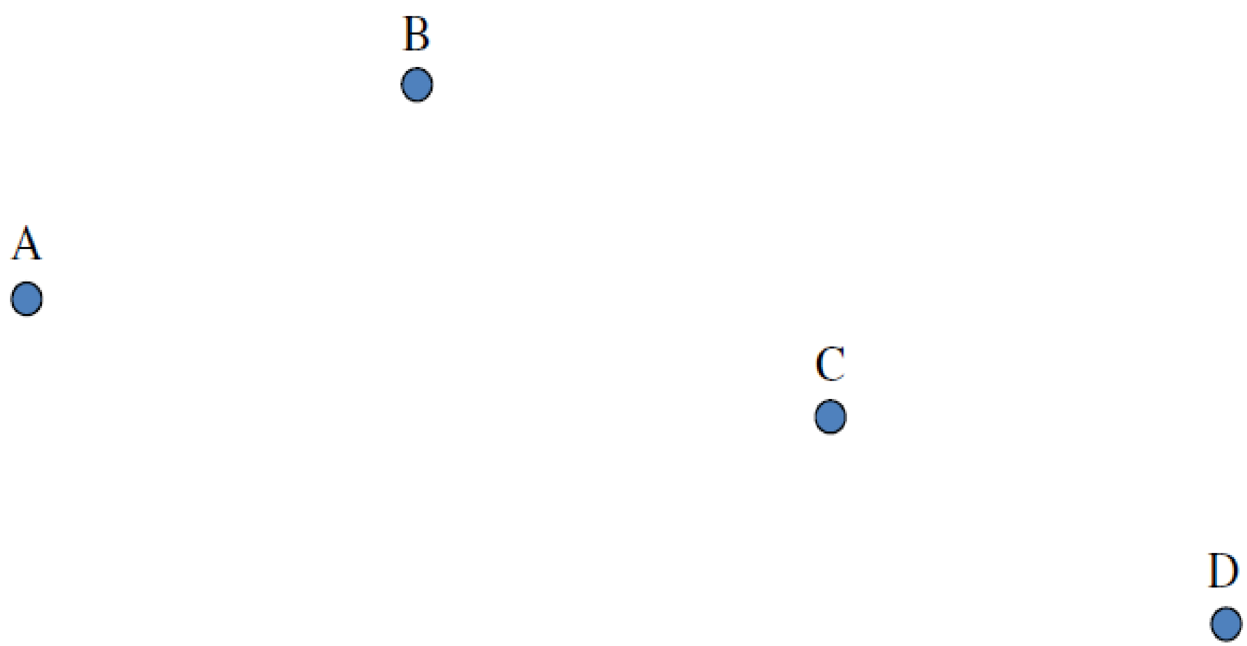


Na interpolação, a curva passa sobre todos os pontos definidos.

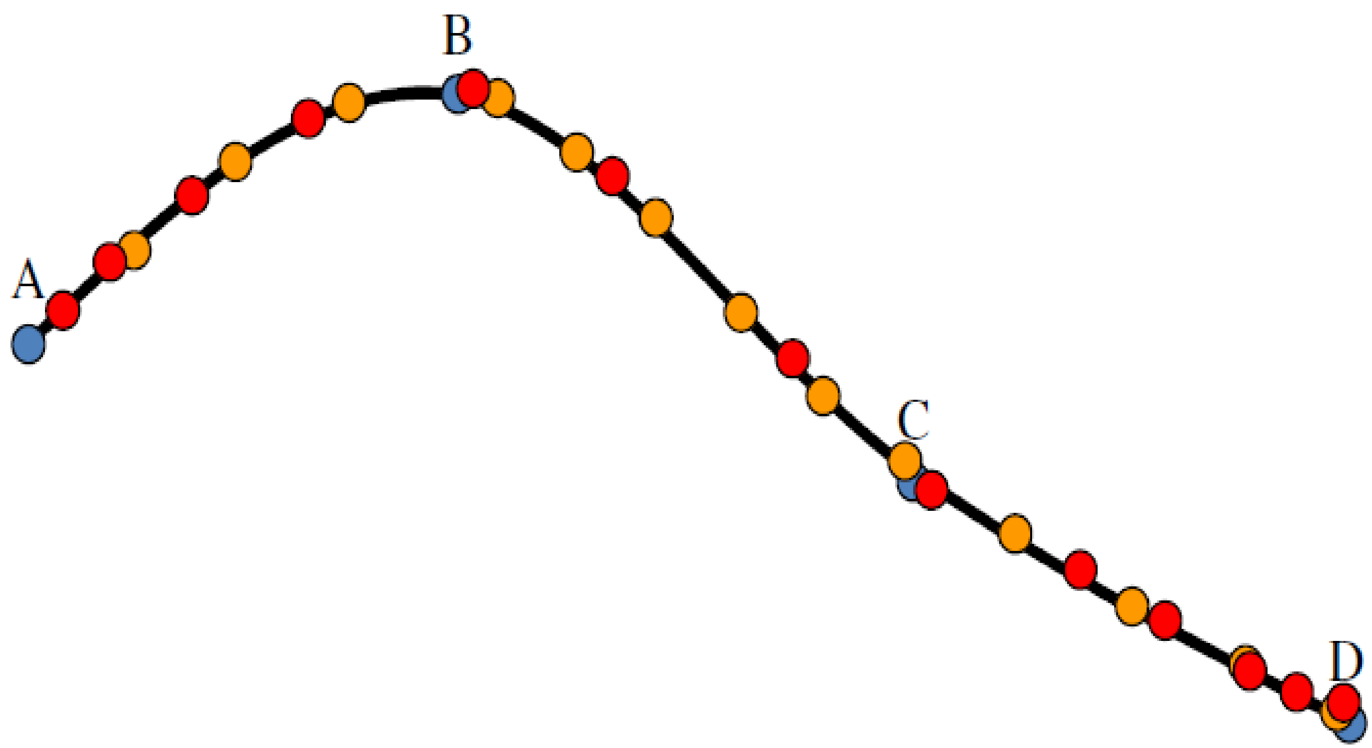


Na aproximação, a curva começa sobre o ponto inicial e termina sobre o final. Os demais pontos são aproximados.

Gerar uma curva **suave** que passe por **pontos** específicos



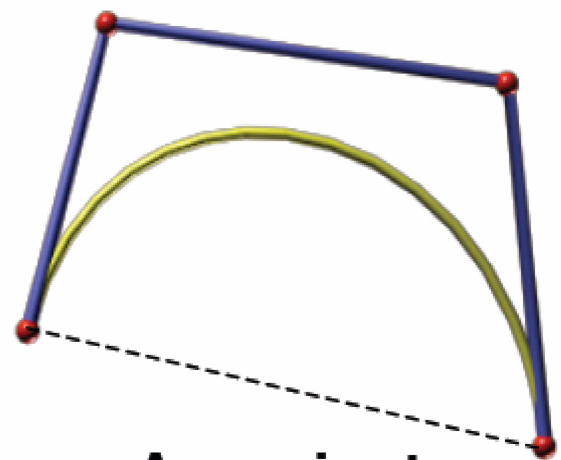
gerar uma curva no espaço, distribuindo **pontos** de maneira **suave**



Dado um número *n* de pontos para traçar uma curva:

- ***interpolar*** os pontos (curva passa *necessariamente* por todos os pontos)
- ***aproximar*** os pontos (pontos definem cobertura convexa (*convex hull)* da curva)

Interpolate



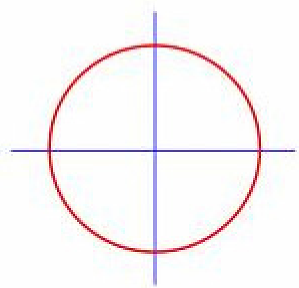
Approximate

Não paramétrica vs paramétrica

- Não paramétrica
  - Explícita y = f(x)
  - Implícita f(x, y) = 0
- Equação implícita de segundo grau geral

$$ax^2 + b2xy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0$$

Exemplo circunferência representações não paramétricas



Explícita y = f(x)

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

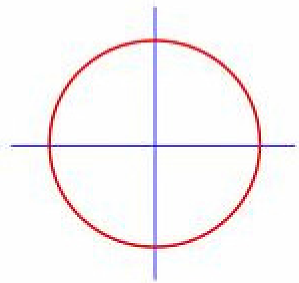
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ or } x^2 + y^2 = 1$$

Implícita f(x, y) = 0

Exemplo circunferência representações paramétri

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ f(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

$$\begin{cases} x = \sin\ \theta \\ y = \cos\theta \end{cases} \quad \text{where } \theta \in [0, 2\pi]$$



$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{where } t \in [0, 1]$$

E essas?

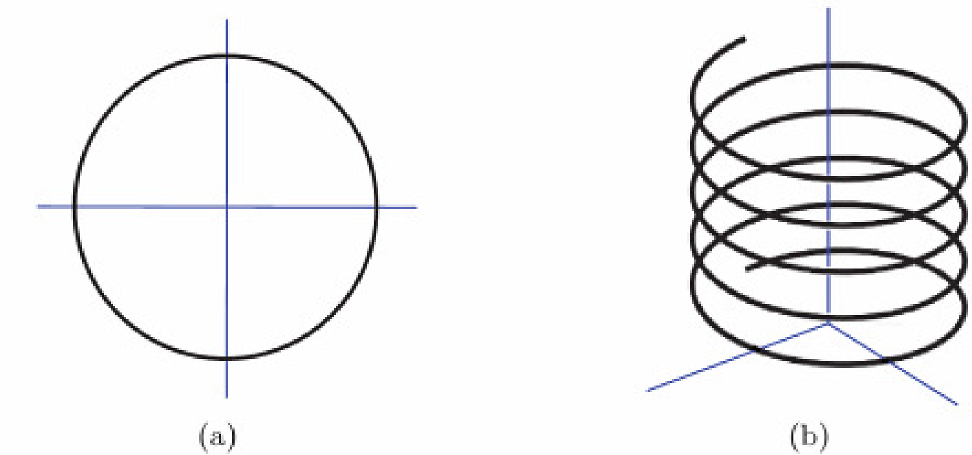
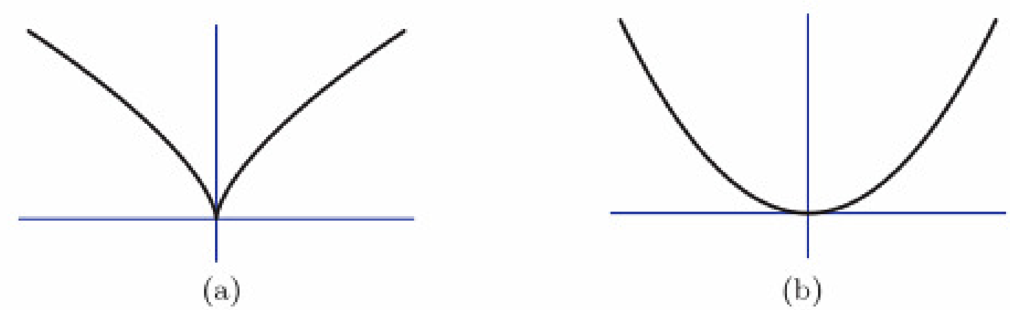


Fig. 1.1. (a) Image and (b) graph of $f(t) = (\cos t, \sin t)$.



. **1.2.** (a) Cuspidal cubic $x^3 = y^2$ and (b) parabola $y = x^2$ as *images* of different ımetrisations.

Explícita $y = f(x)$

Implícita $f(x, y) = 0$

Representação implícita

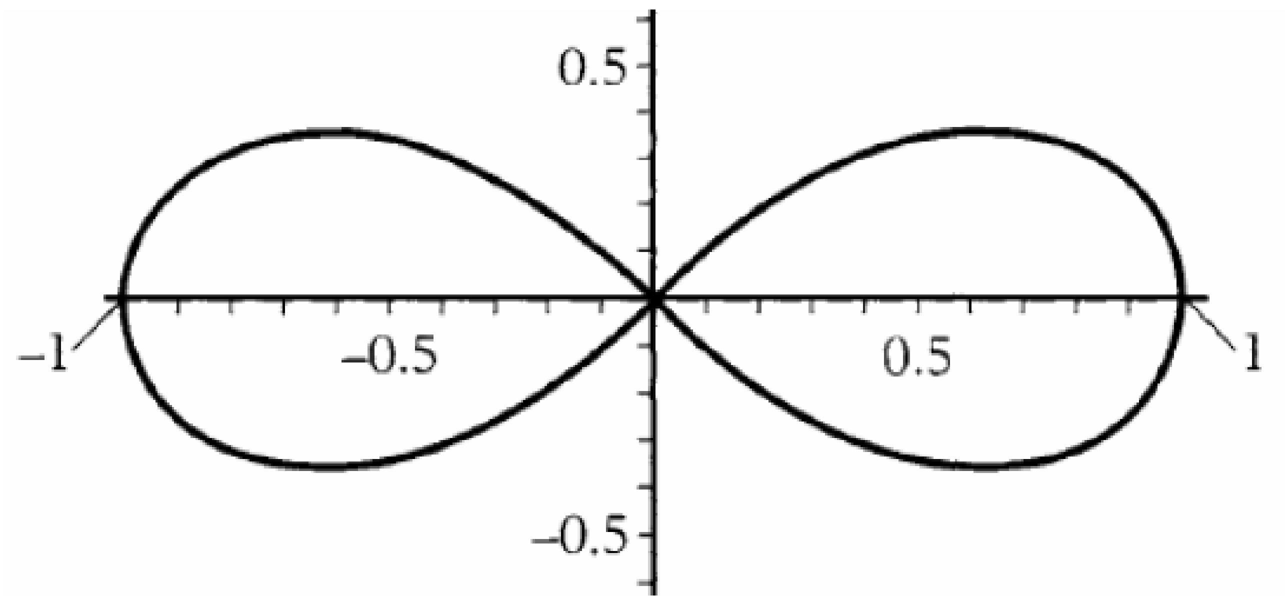
- Curva em 2D: $f(x,y) = 0$
  - Linha: $ax + by + c = 0$
  - Círculo: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- Superfície em 3D: $f(x,y,z) = 0$
  - Plano: $ax + by + cz + d = 0$
  - Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

Outros exemplos:

- Lemniniscata de Bernoulli => símbolo infinito
- Quarto grau!

$(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 = 0$

Implícita f(x, y) = 0



Curvas não paramétricas

- Linha
- Círculo
- Parábola
- Elipse
- Hipérbole

. The equation $-z = x^2 + y^2$ *explicitly* defines the paraboloid in $\mathbb{R}^3$.

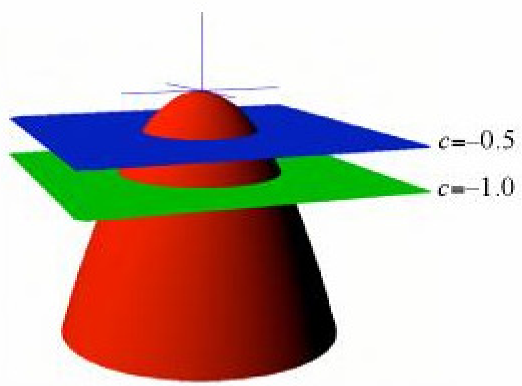
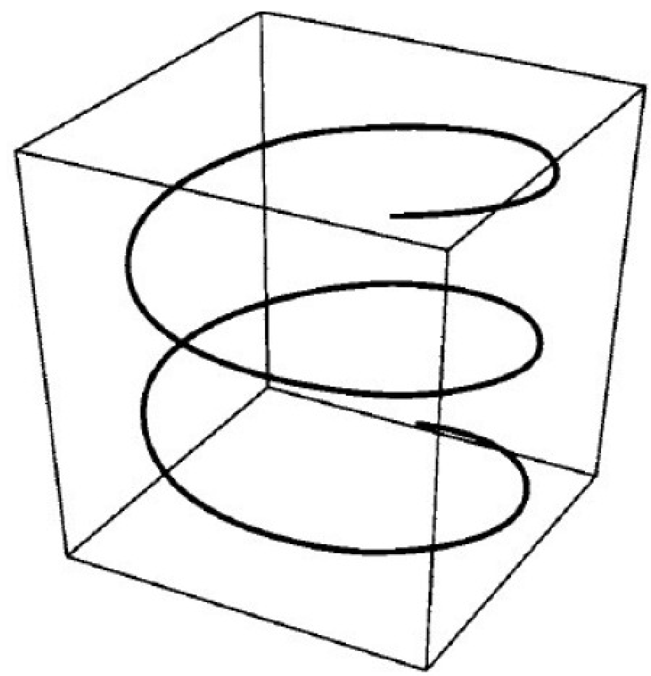


Fig. 1.7. The paraboloid $-z = x^2 + y^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Curvas paramétricas

– Pontos sobre uma curva são representados com uma função de um único parâmetro
  - $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$
    – u : variável paramétrica

$x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t/5$

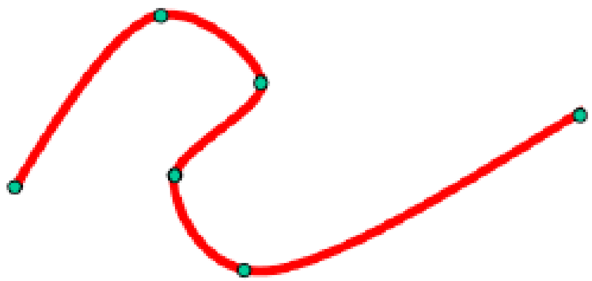


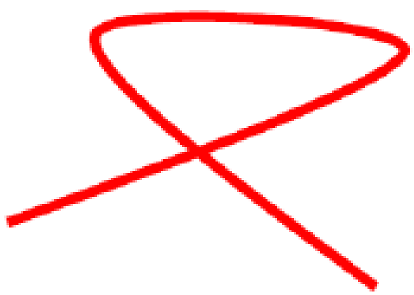
Peculiaridades das curvas em CG

Principais desvantagens das representações **não-paramétrica** em CG

- É difícil definir a equação não paramétrica de uma curva que passe por um conjunto de pontos pré-definidos.

- Não permite a representação de curvas com laços





Peculiaridades das curvas em CG

Para CG, representações paramétricas costumam ser as mais convenientes

Assim, genericamente, uma curva 3D é

- $Q(t)=[x(t) \;\; y(t) \;\; z(t)]$

x(t), y(t), z(t) são chamadas de funções-base (*base functions*)

$$P(u) = (X(u), Y(u), Z(u))$$
$$0 \le u \le 1$$

$$P(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$
$$0 \le u \le 1$$
$$0 \le v \le 1$$

- As expressões paramétricas suportam declives infinitos, curvas fechadas ou multi-valor.

dy/dx = (dy/du) / (dx/du)

dy/dx = infinito => dx/du = 0

Reta na forma paramétrica

$$P(t) = P_0 + at$$

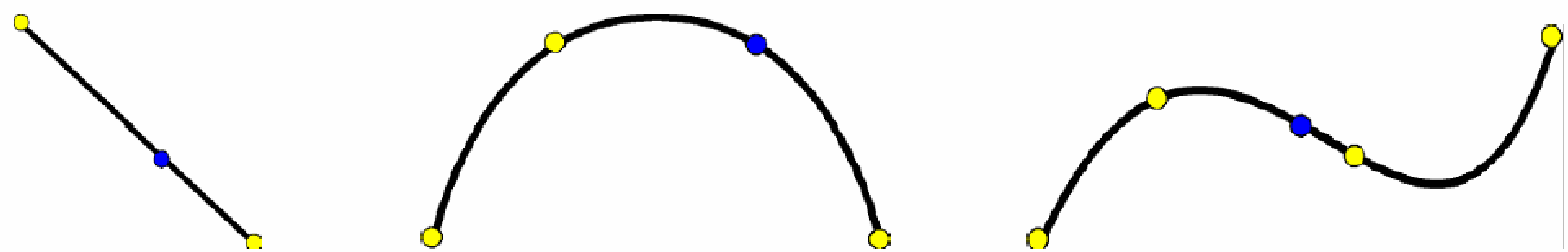
- $P_x = P_{x0} + at$
- $P_y = P_{y0} + at$
- $P_z = P_{z0} + at$

Parametrizando polinômios

$f(t) = at + b$

$f(t) = at^2 + bt + c$

$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$



Linear

Quadrático

Cúbico

- Elementos geométricos definidos parametricamente são inerentemente limitados ($0 <= u <= 1$).

- As expressões paramétricas são facilmente traduzidas na forma de vectores e matrizes.

- Utilização de um só modelo matemático para representar qualquer curva ou superfície.

Trabalho 1

- Parte 1:
- Implemente um programa que:
- Pergunte para o usuário fornecer 4 pontos em sequencia e os mostre na tela.