

<http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html>



Aula 19

2017/2

Sistemas de coordenadas

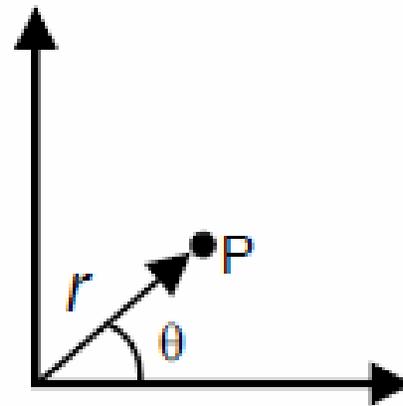
Transformação entre sistemas

Sistemas de Coordenadas

- O Sistema de Coordenadas nos dá uma referência sobre o tamanho e a posição dos objetos na área de trabalho;
- Existem diferentes sistemas de coordenadas para descrever os objetos.

Sistemas de Coordenadas

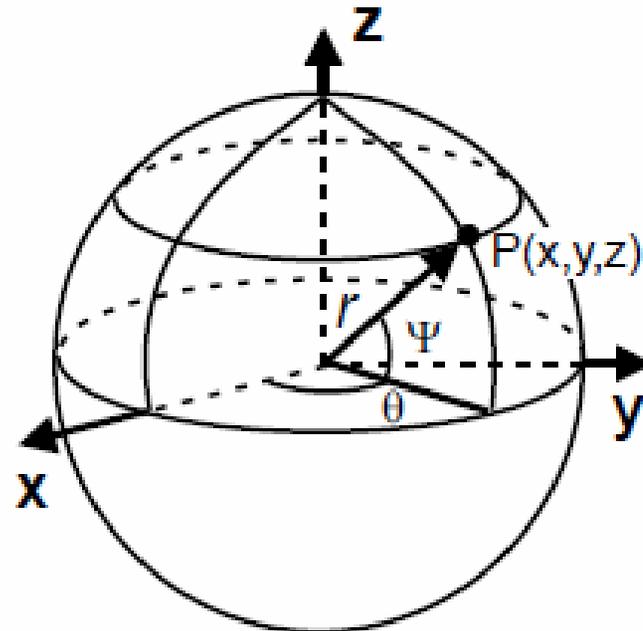
- Coordenadas Polares
 - As coordenadas são medidas por um raio e um ângulo (r, θ) ;



Coordenadas Polares

Sistemas de Coordenadas

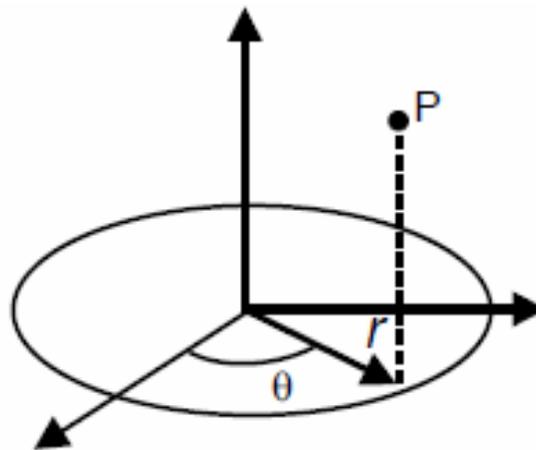
- Coordenadas Esféricas
 - As coordenadas são descritas por raio e dois ângulos (r , θ , β);



Coordenadas Esféricas

Sistemas de Coordenadas

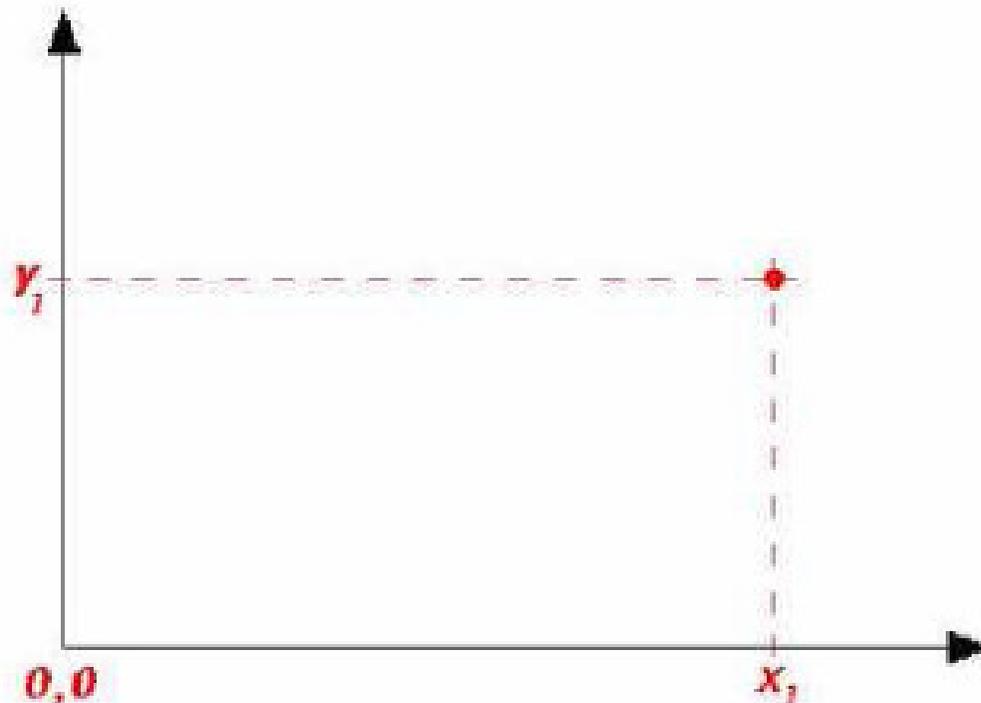
- Coordenadas cilíndricas
 - As coordenadas são descritas por raio, ângulo e comprimento (r , θ , c);



Coordenadas Cilíndricas

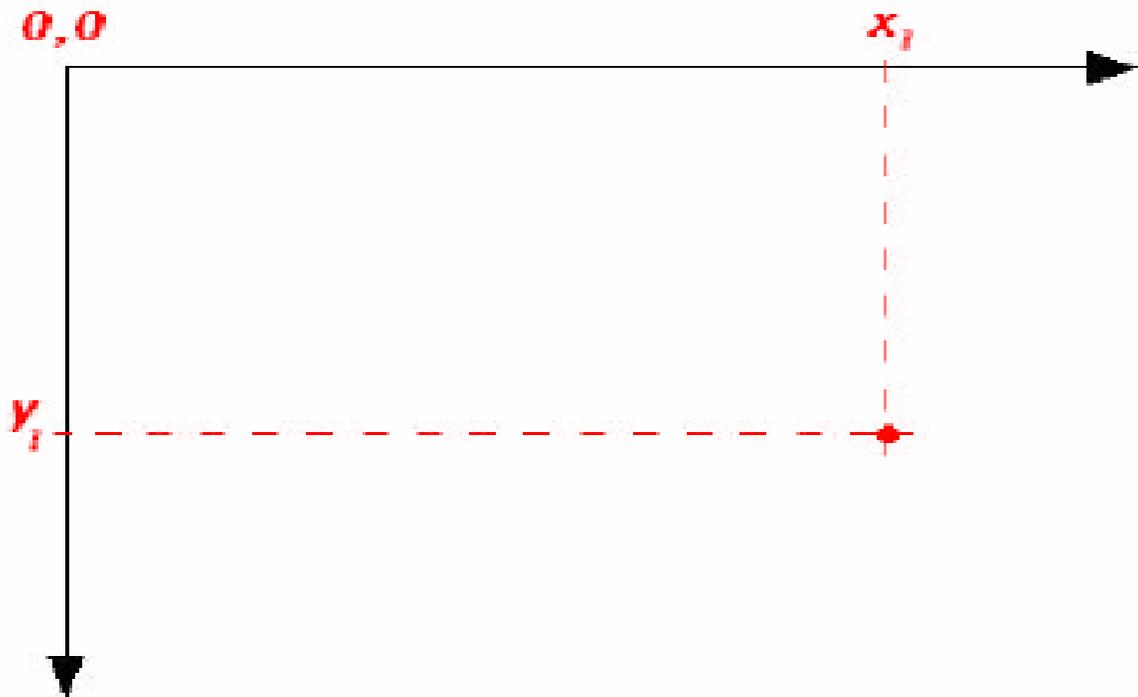
Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas Cartesianas Bidimensionais
 - As coordenadas são descritas por comprimento e largura;



Sistemas de Coordenadas

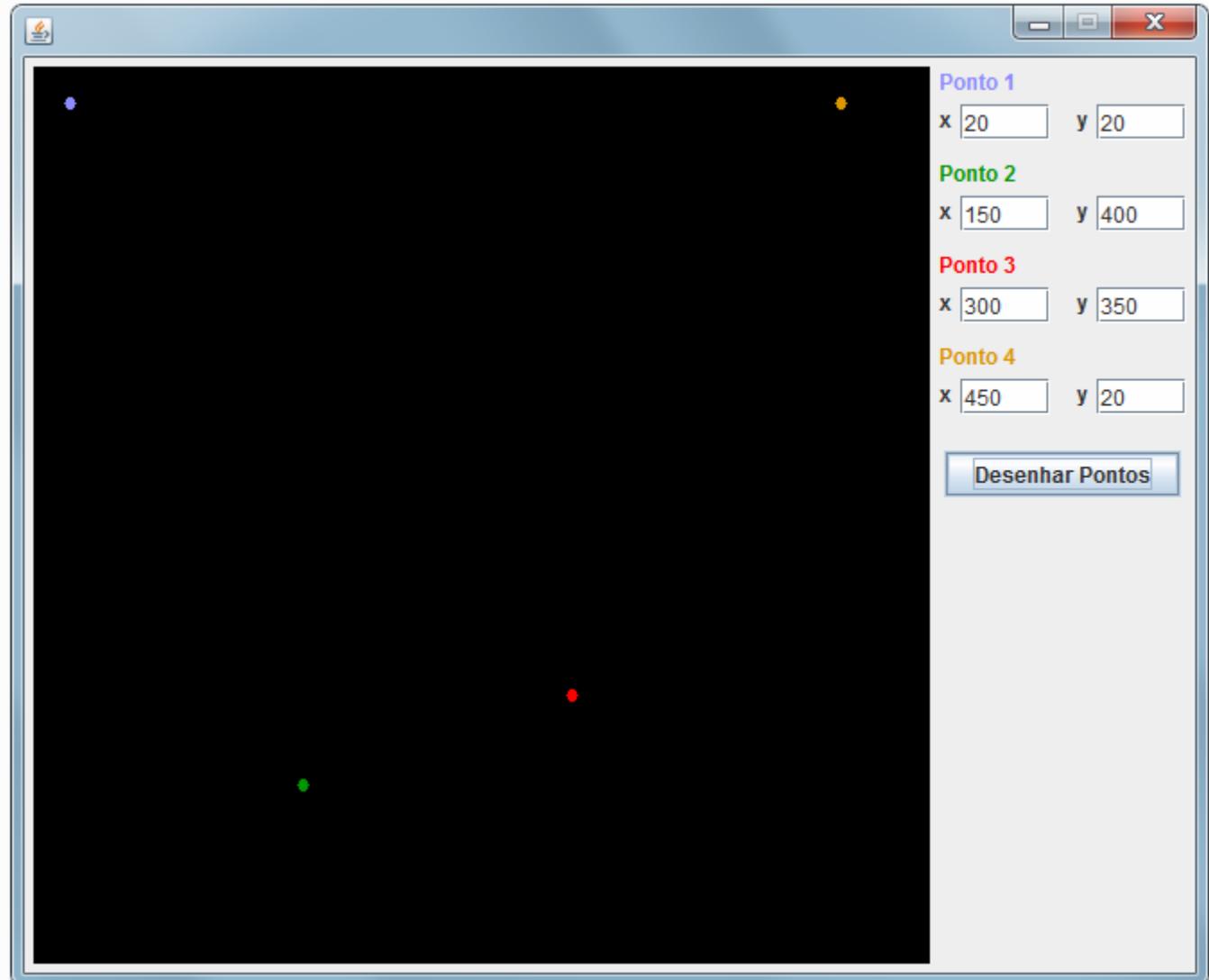
- Os monitores utilizam coordenadas cartesianas bidimensionais, porém a orientação do eixo Y cresce no sentido contrário;



Por exemplo no seu trabalho de curvas

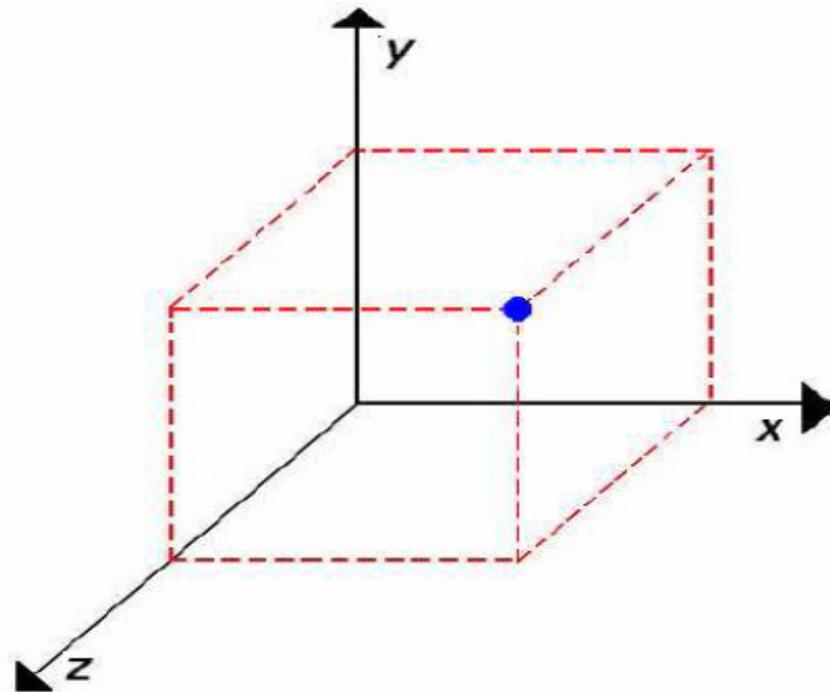
Voce pode só usar inteiros, entre 0 e 500!!!

E a orientação dos eixos...



Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas Cartesianas Tridimensionais
 - As coordenadas são descritas por comprimento, largura e profundidade;



No intuito de facilitar as tarefas envolvidas no processo de renderização de uma cena 3D, é comum a definição e uso dos seguintes Sistemas de Coordenadas, também chamados de sistemas de referência da pipeline gráfica:

Sistema de Coordenadas do Objeto

Sistema de Coordenadas do Mundo ou Universo

Sistema de Coordenadas de Normalizado

Sistema de Coordenadas do Dispositivo

Sistema de Coordenadas da Câmera

Sobre o uso de sistemas de coordenadas em aplicações de desenho de cenas 3D, são decompostas internamente como uma sequência de tarefas com o objetivo de, partindo da definição de objetos que compõe e caracterizam a cena 3D, produzir uma imagem 2D.

Sistemas de Referência

- Um sistema de coordenada é denominado de Sistema de Referência quando servir para alguma finalidade específica;
- Aspectos a serem observados na definição de um sistema de referência:
 - **Unidade** de referência básica;
 - **Limites** extremos dos valores aceitos para descrever os objetos.

Sistemas de Referência

- Um sistema de coordenada denominado de **Sistema de Referência** por exemplo , é util para descrever os elemento da cena, referencia a posição da câmera em relação a objetos.

Sistemas de Referência

- Alguns sistemas recebem denominação especial:
 - Sistema de Referência do Universo – SRU;
 - Sistema de Referência do Objeto – SRO;
 - Sistema de Referência Normalizado – SRN;
 - Sistema de Referência do Dispositivo – SRD;

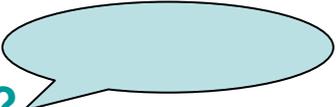
Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Universo – SRU
 - Descreve os objetos em termos das coordenadas utilizadas pelo usuário em determinada aplicação;

Sistema de Referência do Universo - SRU

- Assim, cada usuário especifica o seu universo de trabalho, ex:
 - Sistemas CADD de arquitetura: O universo será em metros ou centímetros;
 - Sistemas CADD de mecânica: O universo será em milímetros ou nanômetros;

O que é o software CAD?



CAD, ou projeto e desenho auxiliados por computador (CADD), é o uso de tecnologia para projetar e documentar projetos. O software CAD substitui o rascunho manual por um processo automatizado.

Sistema de Referência do Universo - SRU (limites)

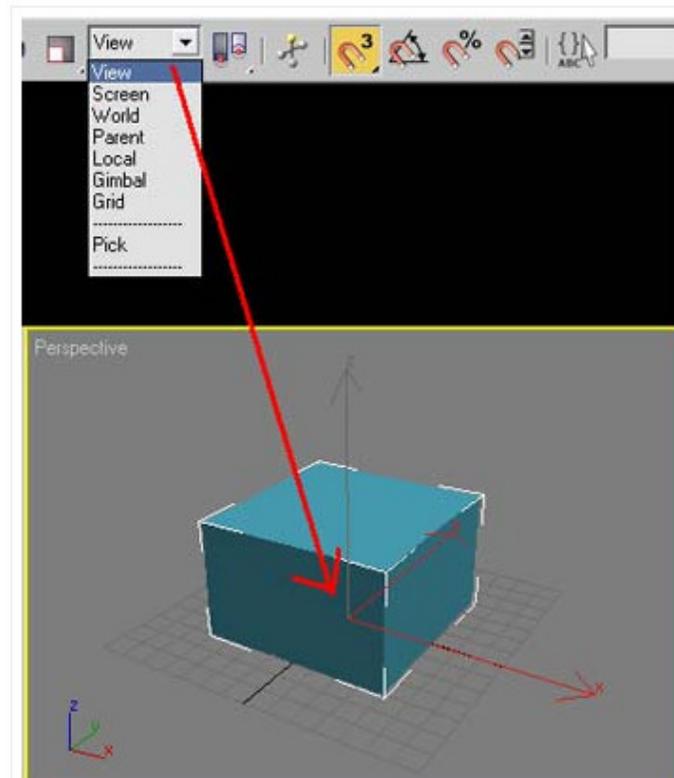
- Cada sistema CADD deverá ter suas limitações extremas. Ex.:
 - Universo de trabalho: Escala de milímetros;
 - Limites da área de trabalho (valores inteiros):
 - $X = 0 - 100.000$
 - $Y = 0 - 100.000$

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Objeto – SRO
 - Trata o objeto como um mini universo individual;
 - Cada objeto tem suas particularidades descritas em função de seu sistema;
 - Geralmente o centro do sistema de coordenadas coincide com o seu centro de gravidade.

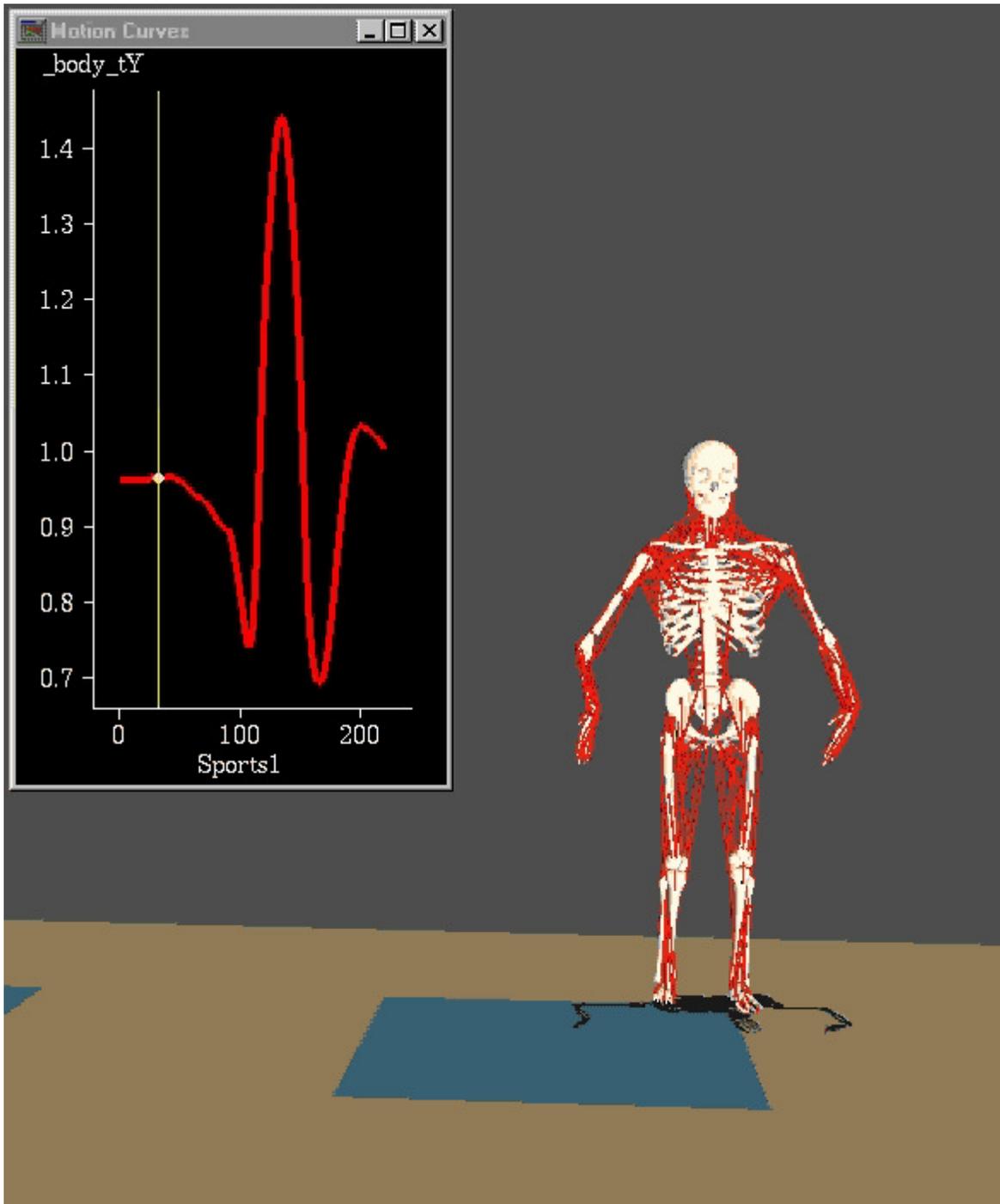
Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Objeto – SRO

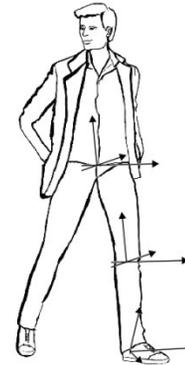


Sistema de Referência do Objeto -SRO

- Cada objeto possui um universo individual, ou seja, suas coordenadas são descritas em função de seu próprio sistema;
- Exemplos.:
- Você quer fazer um cenário de um game, desenhar um objeto ou parte dele, fazer uma maquete do sistema solar, etc...



diferentes
Sistemas de
Coordenadas
para um objeto
3D



Objeto a partir da
transformação de
cubos



Sistemas de Referência

- Sistema de Referência Normalizado – SRN
 - Trabalha com coordenadas normalizadas (valores entre 0 e 1) Ex.: $0 \leq X \leq 1$ e $0 \leq Y \leq 1$, sendo que ambos os eixos possuem suas coordenadas expressas em números reais;
 - Serve como um sistema de referência intermediário entre o SRU e o SRD;
- Finalidade: Tornar a geração de imagens independente do dispositivo, pois este é um sistema de coordenadas padrão (normalizado);

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Dispositivo – SRD
 - Utiliza coordenadas que podem ser fornecidas diretamente para um dispositivo de saída específico (1024x512, 640x480, 800x600, etc.);;
 - Em vídeo pode indicar o número máximo de pixels que podem ser acesos ou a resolução especificada na configuração do sistema operacional;

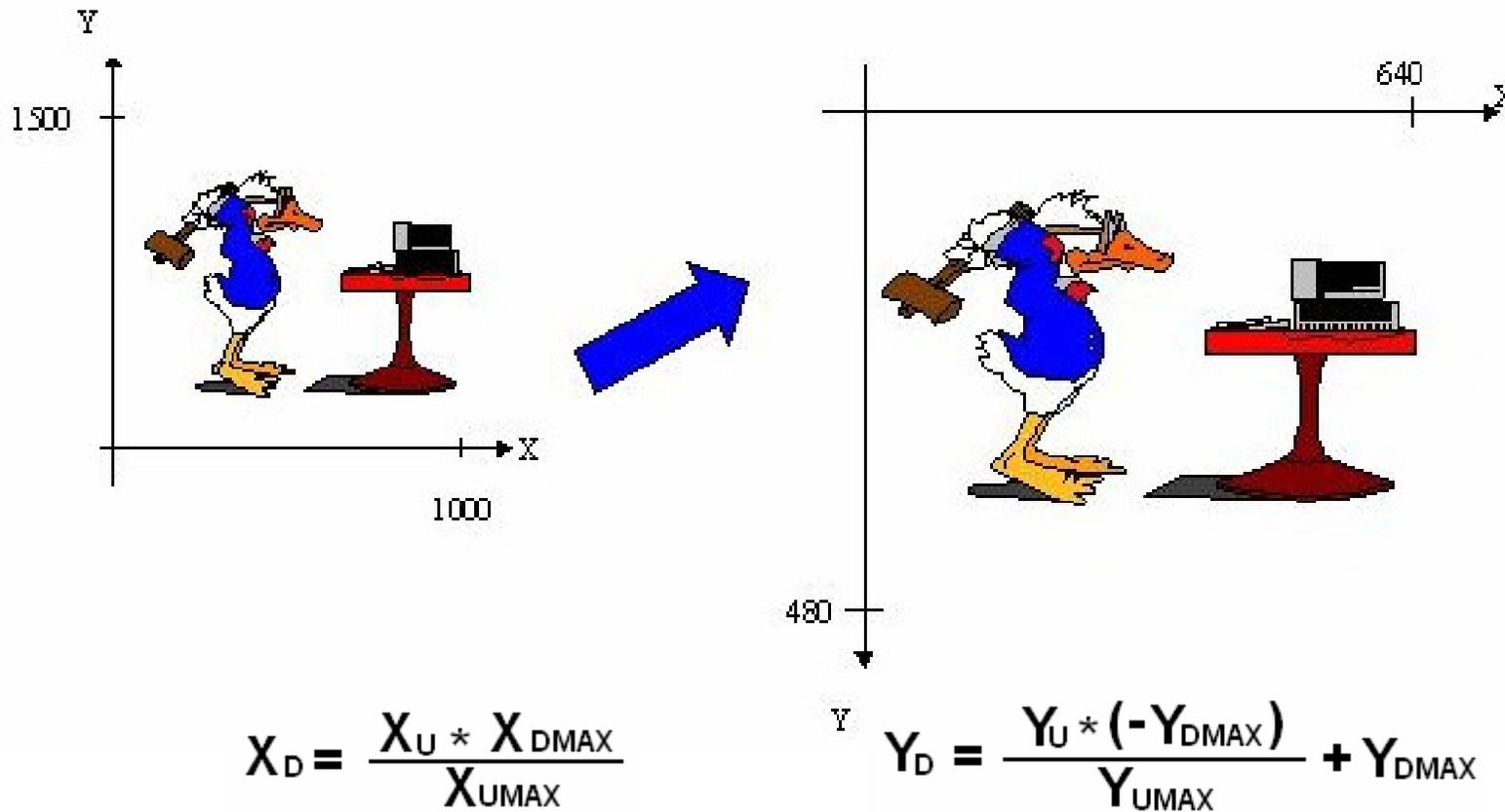
Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Dispositivo – SRD
 - Em scanner pode indicar a resolução máxima estabelecida ou de captura;
 - Nos hardwares o sistema de coordenadas depende geralmente da resolução possível e da configuração definida pelo usuário entre um conjunto de configurações possíveis.

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Normalmente quando se cria um modelo as informações gráficas dizem respeito à aplicação e não ao dispositivo.
- Para permitir a visualização do modelo faz-se necessário realizar uma conversão dos valores do modelo para valores compatíveis com as dimensões da tela.
- A esta conversão dá-se o nome de **Mapeamento**.

Transformações entre Sistemas de Coordenadas



Transformações entre Sistemas de Coordenadas

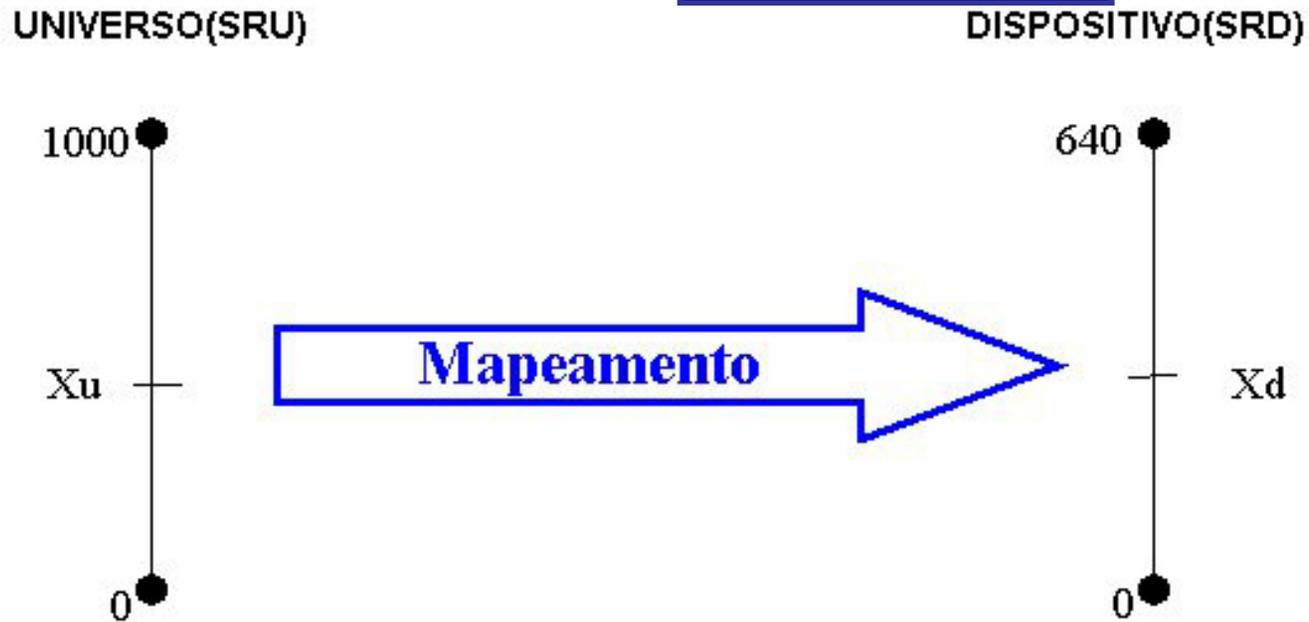
- Dados para a conversão

	Limites do SRU	Limites do SRD
Mínimo	(0, 0)	(0, 0)
Máximo	(1000, 1500)	(640, 480)

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Iniciando pela componente X temos, de acordo com o diagrama abaixo:

$$X_D = \frac{X_U * X_{DMAX}}{X_{UMAX}}$$



$$\frac{X_d - 0}{X_u - 0} = \frac{640 - 0}{1.000 - 0} \quad \text{ou} \quad X_d = \frac{X_u * 640}{1.000}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Para a componente Y temos:
$$Y_D = \frac{Y_U * (-Y_{D_{MAX}})}{Y_{U_{MAX}}} + Y_{D_{MAX}}$$

UNIVERSO(SRU)

DISPOSITIVO(SRD)



$$\frac{Y_d - 480}{Y_u - 0} = \frac{0 - 480}{1500 - 0} \quad \text{ou} \quad Y_d = \frac{Y_u * (-480)}{1500} + 480$$

Vamos incluir isso no seu trabalho 1 e torna-lo nosso trab. 3 ?

- Mude sua implementação do trab 1 para que o usuário fornecer pontos em sequência e os mostre na tela.
- Mas antes defina com ele, as coordenadas cartesianas máximas e mínimas que ele vai querer usar.
- E você mesmo faça as operações de transformações que comentamos nesta aula, antes de mostrar os pontos.

Window x Viewport

- Vamos chamar a area que ele define de: Window
- E a da nossa tela de Viewport
- Assim podemos dizer:
- Inclua no seu trabalho uma função que você vai implementar que vai fazer a transformação Window -> Viewport
- E vice-versa, no caso dele apontar na tela onde estão os pontos e voce os armazenar no seu programa em 2D.

Trab 3 - cont

- Depois gere as curvas de Bezier usando esses pontos.
- Com essa curva gere uma superfície 3D usando a mesma técnica de varredura e as mesmas projeções do Trab1.
- Renderize sua superfície usando alguma técnica de shading que seja apropriada.
- Entrega 07/12/2017 (em sala de aula)

Bases ortonormais

Uma base é **ortogonal** se os vetores que a compuserem forem mutuamente **ortogonais**.

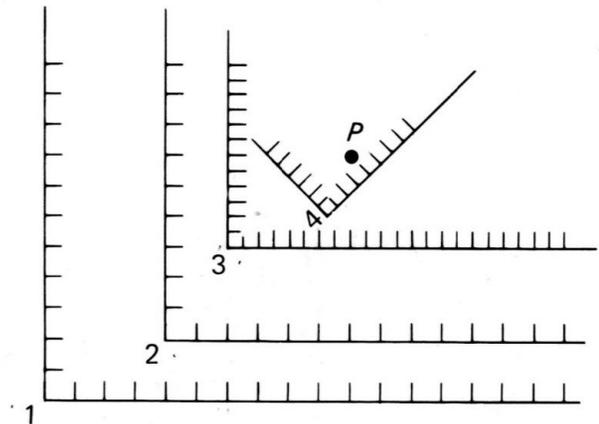
Uma base é **ortonormal** se os seus vetores além de **ortogonais** forem normalizados (unitários).

(Para simplificar passaremos ao \mathbb{R}^2 em coordenadas homogêneas)

As 4 bases ao lado

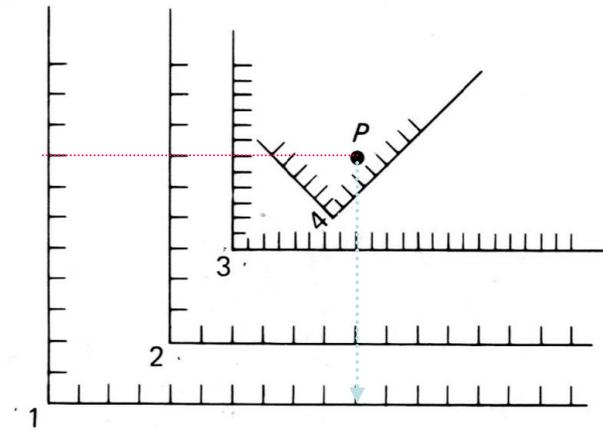
são ortonormais ?

(em relação a elas próprias e em relação a base canônica do \mathbb{R}^2 ?)



Mudança de base:

Dado um ponto em um sistema de eixos como representá-lo em outro sistema qualquer?

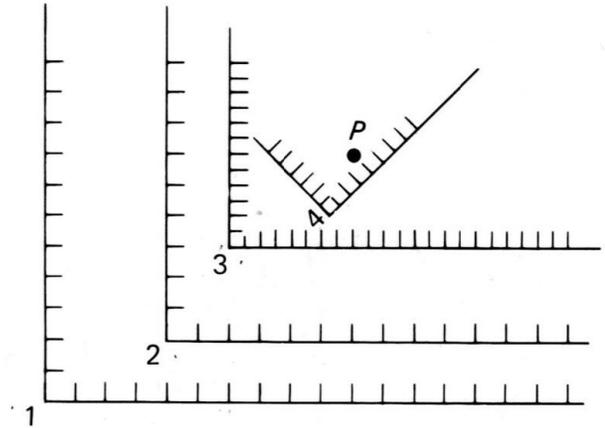


$$P = (10, 8)^1 = (6, 6)^2 = (8, 6)^3 = (4, 2)^4$$

Mudança da base 1 para a 2

$$(10,8)^1 = (6,6)^2$$

- A base 2 pode ser vista como a base 1, deslocada para a posição (4,2). Ou a 1 como a 2 deslocada de (-4,-2).



- Assim a **matriz de transição** da base 1 para a 2 é dada por: $M_{1 \rightarrow 2}$

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} \mathbf{P}^1$$

- E sua **inversa** representa a transição da base 2 para a 1: $M_{2 \rightarrow 1}$

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{P}^2$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

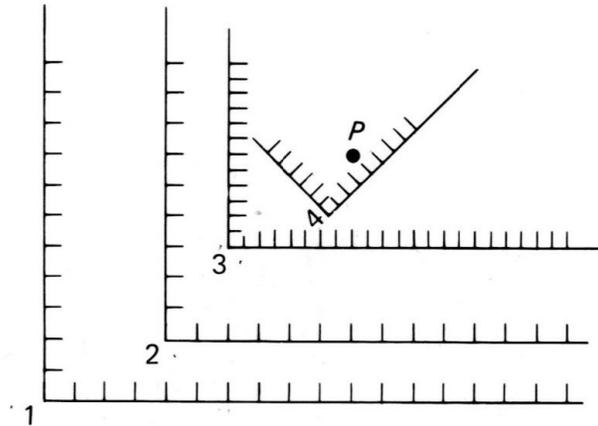
$$\begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Repare que a única diferença
entre elas

- **é o centro do sistema de eixos**
A **matriz de transição** da base 1 para a 2 é dada por:
 $M_{1 \rightarrow 2}$ é a identidade combinada com a **descrição** do centro **da base 1** em função do sistema de eixos da **base 2**.
- A **matriz de transição** transição da base 2 para a 1:
 $M_{2 \rightarrow 1}$ é a matriz identidade combinada com a **descrição** do centro **da base 2** em função do sistema de eixos **da base 1**.

Mudança da base 2 para a 3

- A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como **deslocada** para a posição $(-4, -6)$ e depois tendo sua unidade de base **amplificada por um fator 2** !



- Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- E sua **inversa** representa a **transição da base 2 para a 3**:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mudança da base 2 para a 3: $(6,6)^2 = (8,6)^3$

A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como :
 deslocada para a posição $(-4,-6)$ e
 depois tento sua unidade de base multiplicada por 2
 (importante: essa ordem não é comutativa) !

Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por:

$M_{2 \rightarrow 3}$

$$P^3 = M_{2 \rightarrow 3} P^2$$

E sua **inversa** representa a **transição da base 3 para a 2**:

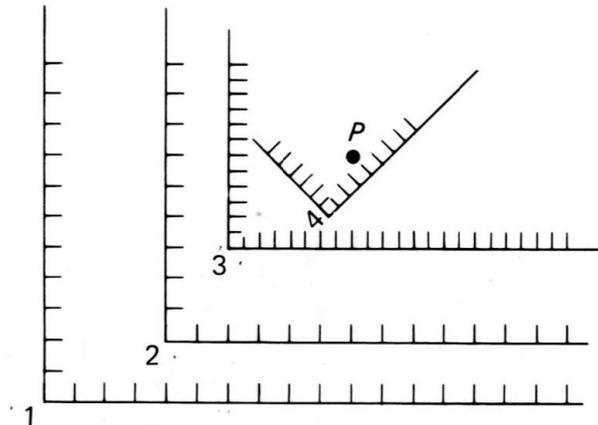
$M_{3 \rightarrow 2}$

$$P^2 = M_{3 \rightarrow 2} P^3$$

A base 2 pode ser descrita em função da base 2 como :

deslocada para a posição $(2,3)$ e
 depois tento sua **unidade de base multiplicada por 0,5**
 (lembre: essa ordem não é comutativa) !

Verifique se $M_{2 \rightarrow 3} M_{3 \rightarrow 2} = I = M_{3 \rightarrow 2} M_{2 \rightarrow 3}$



$$\begin{matrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Repare como elas combinam os centros com escalas!

- Como já tratamos do centro, suponha que ambos os sistemas tenham o mesmo centro!
- Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 tem suas **colunas formadas** pela descrição dos **vetores unitários da base 2 em função do sistema de eixos da base 3** .
- A matriz de transição da base 3 para a 2 é tem suas **colunas formadas** pela descrição dos **vetores unitários da base 3 em função do sistema de eixos da base 2** .
- Depois combina-se com a descrição do centro da base 3 em função do sistema de eixos da base 2 (i.e. descrevo **tudo da 3 em função da 2!**) .

Combinando matrizes de transição

- Repare que você pode ir da base 3 para a base 2, compondo (i.e multiplicando na ordem correta) as matrizes homogêneas :

- de translação :
- de mudança de escala.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrizes de transição se combinam como **qualquer matriz !**

- Repare que você teria o mesmo efeito combinando as matrizes de **translação das origens e mudança de escala dos vetores unitários das novas bases.**
- Com mesmo raciocínio você pode ir de 3 para 1 ou de 1 para 3, combinando:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 1} \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{M}_{3 \rightarrow 2} \mathbf{P}^3$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 3} \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{M}_{2 \rightarrow 3} \mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} \mathbf{P}^1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{P}^1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{P}^1$$

Voce também poderia ir diretamente:

- Se mudarmos a base \mathbf{B} para uma nova base \mathbf{B}' ,
- As **coordenadas homogêneas** na velha base \mathbf{v} se relacionam com as novas \mathbf{v}' por uma matriz de transição \mathbf{T} : $\mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{v}'$,
- onde as colunas de \mathbf{T} representam os **vetores unitários da nova base** descritos em função dos **vetores unitários da velha base (como se os centros fossem coincidentes)**, e a última coluna descreve o **centro da nova base** em termos da antiga.

Combinando matrizes de transição

Repare que você pode ir da base 3 para a base 1, compondo as 2 matrizes de transição anteriores da mesma maneira como você combina matrizes em coordenadas homogêneas.

Como ficaria $M_{1 \rightarrow 3}$ e $M_{3 \rightarrow 1}$?

Mudança da base 4 para a 3 (e vice versa)
 $= (8,6)^3 = (4,2)^4$

Faça você a última etapa $M_{4 \rightarrow 3}$, $M_{3 \rightarrow 4}$ e também

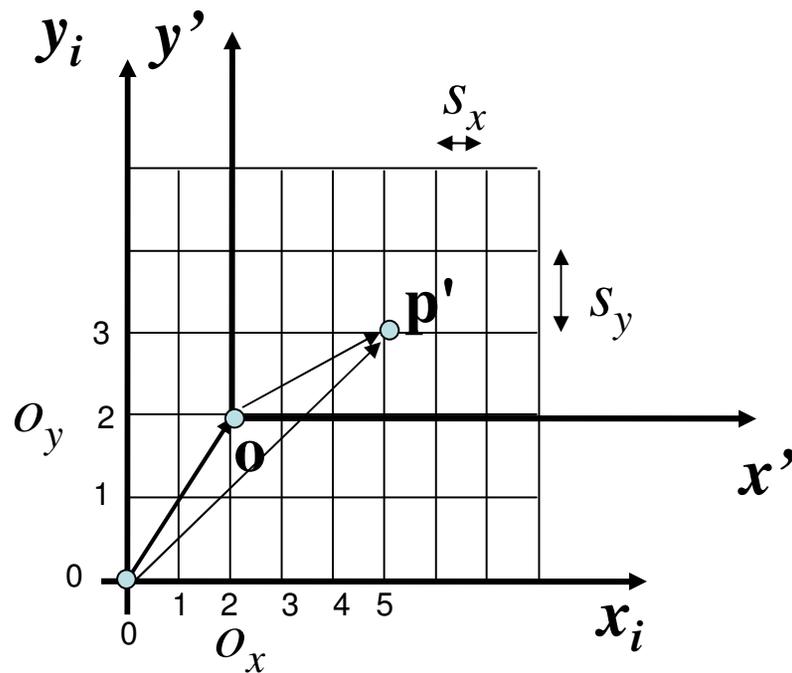
$M_{1 \rightarrow 4}$ $M_{4 \rightarrow 1}$

(Dica : lembre de usar as matrizes de rotação e que a origem do sistema 4 está no ponto **(6,7 ; 1,8)** do sistema 3 !)

Transformações de coordenadas

Genericamente não precisa ter uma unidade única nas duas direções!

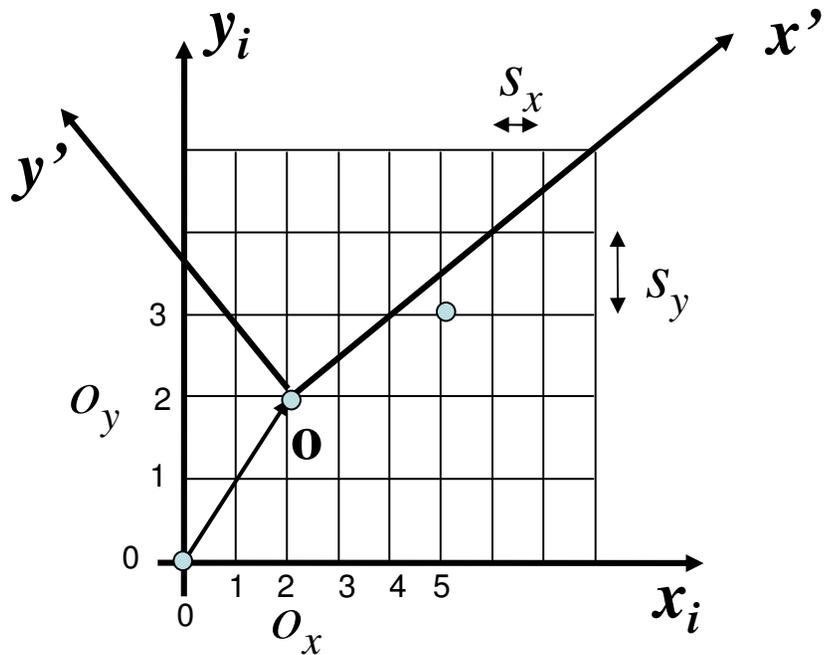
Origem e vetores unitários é que são importantes



$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x (x_i - o_x) \\ s_y (y_i - o_y) \end{pmatrix}$$

Os eixos podem estar em qualquer ângulo!



Qualquer transformação afim pode relacionar os sistemas de eixos!

$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

Transformações de coordenadas genericamente

Os eixos podem sofrer qualquer efeito!

Como se eles mesmo fosse uma imagem!

Sempre se obtém a matriz de transição por:

- Se mudarmos a base \mathbf{B} para uma nova base \mathbf{B}' ,
- As coordenadas na velha base \mathbf{v} se relacionam com as novas \mathbf{v}' pela matriz de transição \mathbf{T} : $\mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{v}'$,
- onde as colunas de \mathbf{T} representam os **vetores unitários da nova base** descritos em função dos **vetores unitários da velha base (como se os centros fossem coincidentes)**, e na última coluna descreve-se o **centro da nova base**, em termos da antiga.

Transformações afins genéricas!

Cada coluna descreve as coordenadas de a,b,c,d

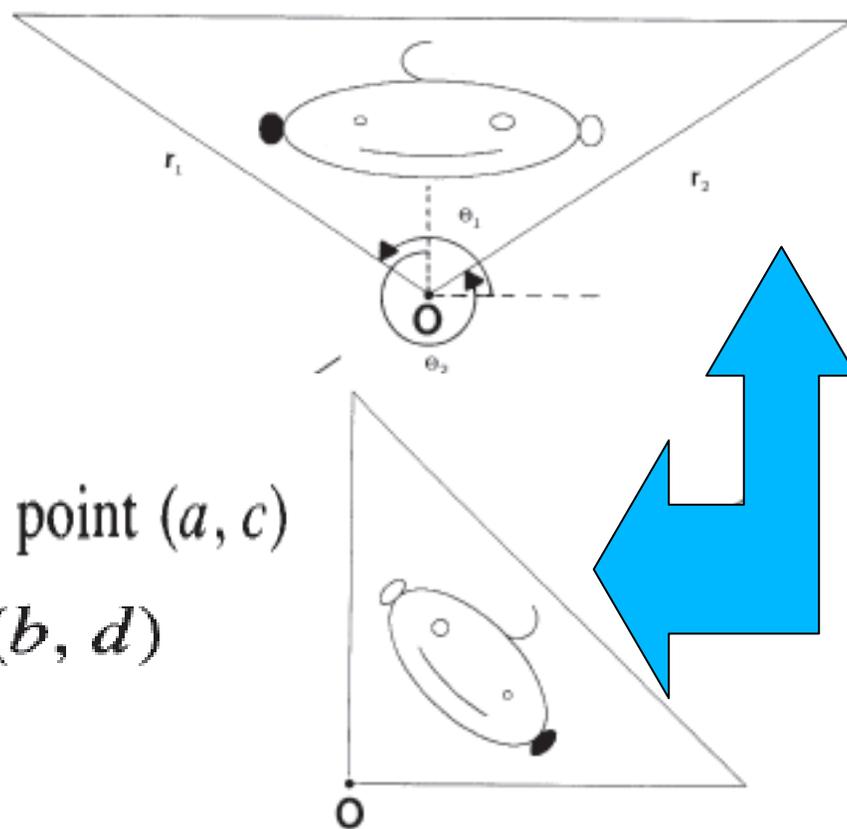
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

(r_1, θ_1) are the polar coordinates of the point (a, c)

$(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$

(b, d)



O mesmo vale para bases 3D

Para mudar de um sistema positivo
(right handed coordinate system) para
um negativo (left handed coordinate
system)

A matriz de transição em coordenadas do \mathbb{R}^3
(normais) é:

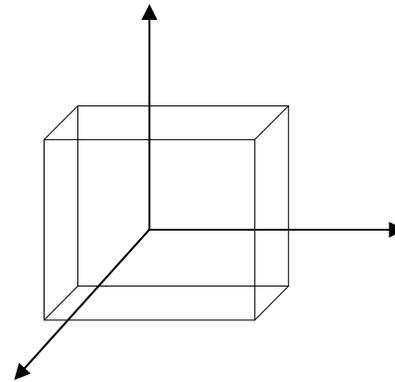
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

**Como é essa matriz de transição em
coordenadas homogêneas ?**

Considerando Ponto como

Algo muito pequeno mas finito e orientável:

$P =$ pequeno cubo de arestas $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, ou
 $\Delta_x \Delta_y \Delta_z$



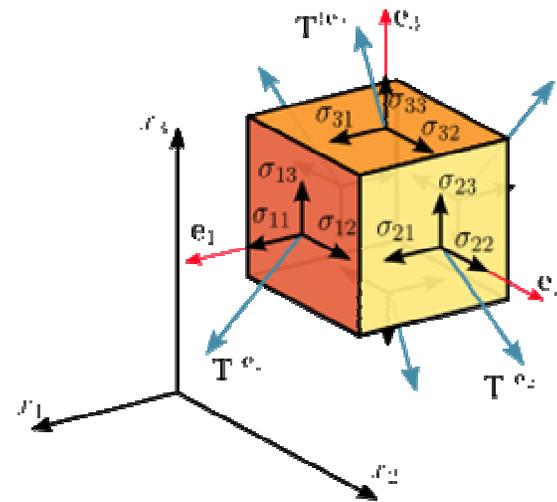
Conhecidas as componentes

- De um tensor para 3 direções ortogonais em um ponto , as **componentes do mesmo tensor para qualquer direção de sistema de eixos ortogonais passando pelo ponto** pode ser determinada de forma simples, se feita com a **notação** adequada

Notação tensorial

- Considere um ponto P paralelo a eixos de referência xyz ou 123.
- Para identificar os **elementos de um tensor** associado aos planos 123 neste ponto , usaremos **2 índices** , o primeiro identificando o plano (pela sua normal) e o segundo a direção.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



Tensor tem 9 componentes

$$\sigma_{ij} \quad i,j = 1,2,3,$$

i - > indica a linha

j - > indica a coluna

$$I_{ij} \quad i,j = 1,2,3,$$

Com esses 9 componentes podemos definir o estado do ponto P
Em qualquer outra direção de eixos ortogonais.

Áreas são caracterizadas

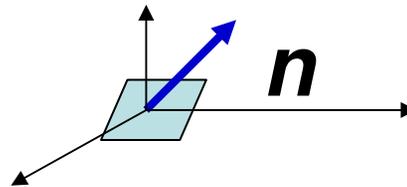
pelas suas normais , n .

- Co-senos diretores de uma direção são os co-senos dos ângulos que essa direção faz com um sistema de eixos .
- Denotamos a_{nx} a_{ny} e a_{nz} os co-senos de n com um sistema de eixos .

2 índices (é um tensor)

- Nesta notação o primeiro índice indica a direção da normal cuja direção se considera e o segundo a direção do sistema de eixos cujo ângulo de identificação identifica o co-seno.

a_{nx} , a_{ny} , a_{nz}



Para um conjunto de co-senos
diretores em uma normal n
sempre tem-se

$$\mathbf{a}_{nx}^2 + \mathbf{a}_{ny}^2 + \mathbf{a}_{nz}^2 = 1$$

Recordando um pouco noções básicas de vetores tem-se

Produto interno no \mathbb{R}^n : (*inner product ou dot product*)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

- comprimento ou norma: $\|u\| = |u| = (u \cdot u)^{1/2}$,

- um vetor com comprimento 1 é chamado **normalizado** ou **unitário**

- **normalizar** um vetor $\Rightarrow u / \|u\|$

- distância entre 2 pontos:

PQ \Rightarrow comprimento do vetor Q-P

Como se calcula a distância entre os pontos (1,1,1) e (2,3,1) ?

Vendo esses pontos como vetores, como eles são transformados em vetores unitários?

Produto interno no \mathbb{R}^n :
(*inner product ou dot product*)

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{produto interno}$$

$$(u \cdot v) = |u| |v| \cos(\beta) = 0$$

ângulo entre 2 vetores: u, v

arco cosseno de

$$= (u \cdot v) / |u| |v|$$

Vendo os pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ e $(2,3,1)$ como vetores, qual o co-seno do ângulo entre eles? Como se chega ao ângulo ?

Componentes de um vetor

- a projeção de um vetor \mathbf{A} 3D em uma direção \mathbf{n} é obtida por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (A_x, A_y, A_z) \cdot (n_x, n_y, n_z)$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (A_x a_{nx} + A_y a_{ny} + A_z a_{nz})$
- Se $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ são as componentes de \mathbf{A} em um sistema de eixos, então suas componentes em qualquer outro sistema (x', y', z') “rotacionado” na mesma origem podem ser definidos pelos co-senos diretores entre as direções dos eixos (x, y, z) e (x', y', z')

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Essa transformação

- Caracteriza vetores de forma completa:
- Um vetor pode ser definido como uma entidade cujas componentes se transformam em relação a rotação do sistema de eixos com descrito pela equação anterior:
- $A_{i'} = \sum a_{i'j} A_j \quad i = x,y,z$

Invariante de vetores

- Vetores também **têm invariantes**:
- Por exemplo:
- O módulo de um vetor independe do sistema de eixos usado para defini-lo :

$$(Ax'^2 + Ay'^2 + Az'^2) = (Ax^2 + Ay^2 + Az^2)$$

Notação tensorial

- **Índice livre** - é o que aparece apenas uma vez como subscrito em um grupo de termos .
- i é Índice livre em: $A_i, a_{ij} A_j$
- Quando aparece um índice livre considera-se que ele pode representar qualquer uma das componentes x, y, z ou $1, 2, 3$ etc... (A_x, A_y, A_z)

Número de Índices livres

- Assim A_i representa um *vetor*
- a_{ij} tem 2 índices livres e pode representar cada um dos 3 componentes , considerando todas as possibilidades tem-se 9 componentes:

$$\begin{array}{ccc} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{array}$$

- Assim a_{ij} representa um *tensor*

Índice provisório

- Quando as letras i, j, k, l, m são repetidas em uma expressão, faz-se a **soma** dos termos com os **índices repetidos** quando esses tomam *sucessivamente os valores dos eixos, x, y, z ou $1, 2, 3$* .
- $a_{i k} A_k = (a_{ix} A_x + a_{iy} A_y + a_{iz} A_z)$
- E considerando todas as possibilidades para o **índice i** tem a expressão (1)

índices **provisórios** repetidos = soma = Σ

- Se houver duplos índices repetidos como na $A_{kl} B_{kl}$, tem-se após as multiplicações decorrentes das possíveis substituições de cada índice, a soma dos 9 termos.
- Com essa idéia de troca dos símbolos é irrelevante qual letra i, j, k, l, m é usada.
- Com essa notação a equação de transformação de vetores fica:

$$A_i = a_{ij} A_j$$

Transformação de tensores

- São tensores qualquer conjunto de 9 quantidades **A_{ij}** que se transforma por rotação do sistema de eixos como:

$$A'_{ij} = a_{i'k} a_{j'l} A_{kl}$$

- (que é pré e pós multiplicar pela rotação transposta)

Se os tensores em uma direção $x y z$ forem

- $T_{ij} = \begin{matrix} -3,5 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 0 & 5,6 \end{matrix}$

- *Como ele é representado em uma referencia $x'y'z'$ que faz 30 graus em torno do eixo z.*

- Quais os a_{ij} ?
$$\begin{matrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{matrix}$$

- *Cada a_{ij} representa o ângulo entre i e i'*

Cossenos diretores

$$\begin{array}{lll} a_{x'x} = \cos 30 & a_{x'y} = \cos 60 & a_{x'z} = \cos 90 \\ a_{y'x} = \cos 120 & a_{y'y} = \cos 30 & a_{y'z} = \cos 90 \\ a_{z'x} = \cos 90 & a_{z'y} = \cos 90 & a_{z'z} = \cos 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a_{x'x}=0,866 & a_{x'y}=0,5 & a_{x'z}=0 \\ a_{y'x}=-0,5 & a_{y'y}=0,866 & a_{y'z}=0 \\ a_{z'x}=0 & a_{z'y}=0 & a_{z'z}=1 \end{array}$$

tensores 2D só na direção $x' y'$

- $T_{ij} = \begin{matrix} -3,5 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 0 & 5,6 \end{matrix}$ com i e $j = x, y$

- $T_{i'j'}$ com i' e $j' = x, y$

- $T_{i'j'} = \begin{matrix} -2,623 & 1,516 & -0,606 \\ 1,516 & -0,875 & 0,350 \\ -0,606 & 0,350 & 5,600 \end{matrix}$

Bibliografia

AZEVEDO, Eduardo e CONCI, Aura. Computação Gráfica: Teoria e Prática. Rio de Janeiro: Campus, 2003.

JUNIOR HETEM, A. **Fundamentos de Informática: Computação Gráfica**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Link: <http://www.inf.pucrs.br/~pinho/CG/Apoio.htm>

