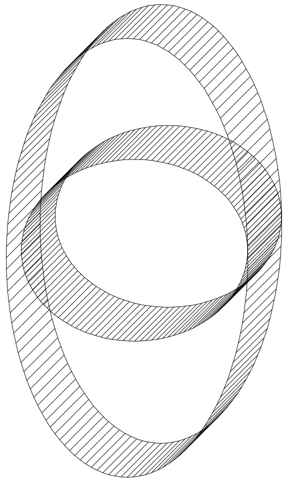
http://www.tutorialspoint.com/computer_graphics/computer_graphics_curves.htm

2017/2

Porque as curvas em CG são especiais?



Aula 16

Peculiaridades das curvas em CG

Para CG, representações paramétricas costumam ser as mais convenientes

Assim, genericamente, uma curva 3D é

– $Q(t)=[x(t)\ \ y(t)\ \ z(t)]$

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ são chamadas de funções-base (*base functions*)

$$P(u) = (X(u), Y(u), Z(u)) \Rightarrow$$ curvas em CG

$$0 \le u \le 1$$

$$P(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \Rightarrow$$ superfícies em CG

$$0 \le u \le 1$$

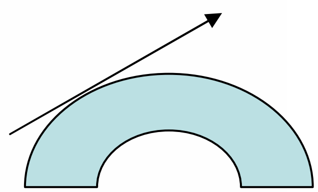
$$0 \le v \le 1$$

É positivo nas paramétricas:

- As expressões paramétricas suportam declives infinitos, curvas fechadas ou multi-valor.

dy/dx = (dy/du) / (dx/du) $\Rightarrow$

dy/dx = infinito => dx/du = 0



- Elementos geométricos definidos parametricamente são inerentemente limitados ($0 <= u <= 1$).

- As expressões paramétricas são facilmente traduzidas na forma de vectores e matrizes.

Elas permitem a:

- Utilização de um só modelo matemático para representar qualquer curva ou superfície.

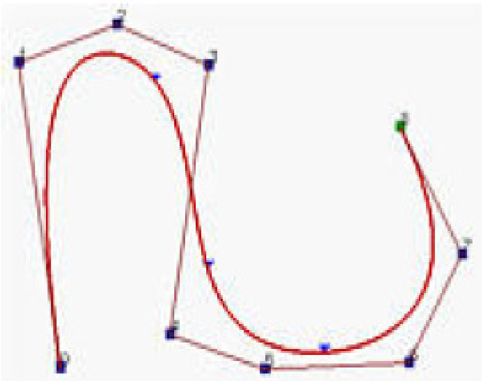
Peculiaridades das curvas em CG

A curva é definida através de um conjunto de **pontos de controle** que influenciam a forma da curva.

Os nós são pontos de controle que pertencem à curva.

A curva pode ser interpolada, passando nesse caso por todos os pontos de controle, ou pode ser aproximada, passando apenas em alguns pontos de controle ou mesmo nenhum.

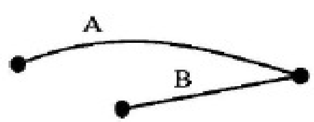
Os pontos de controle definem a fronteira de um polígono designado por *convex hull*.



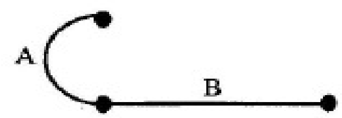
as funções de base devem permitir que os desenhos tenham

Continuidade

- Duas ou mais curvas nos nós (conectando pontos) para formar uma curva contínua
- Tipos de continuidade
  - Continuidade de ponto
  - Continuidade de tangente
  - Continuidade de curvatura



(a) Point continuity - C^0

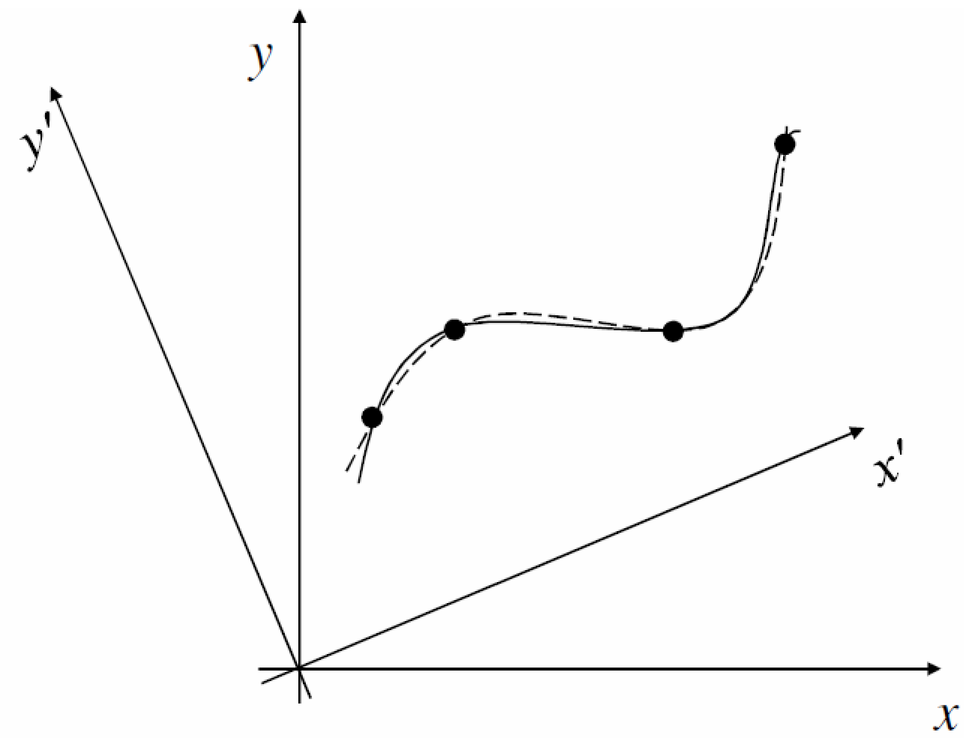


(b) Tangent continuity - C^1

(c) Curvature continuity - C^2

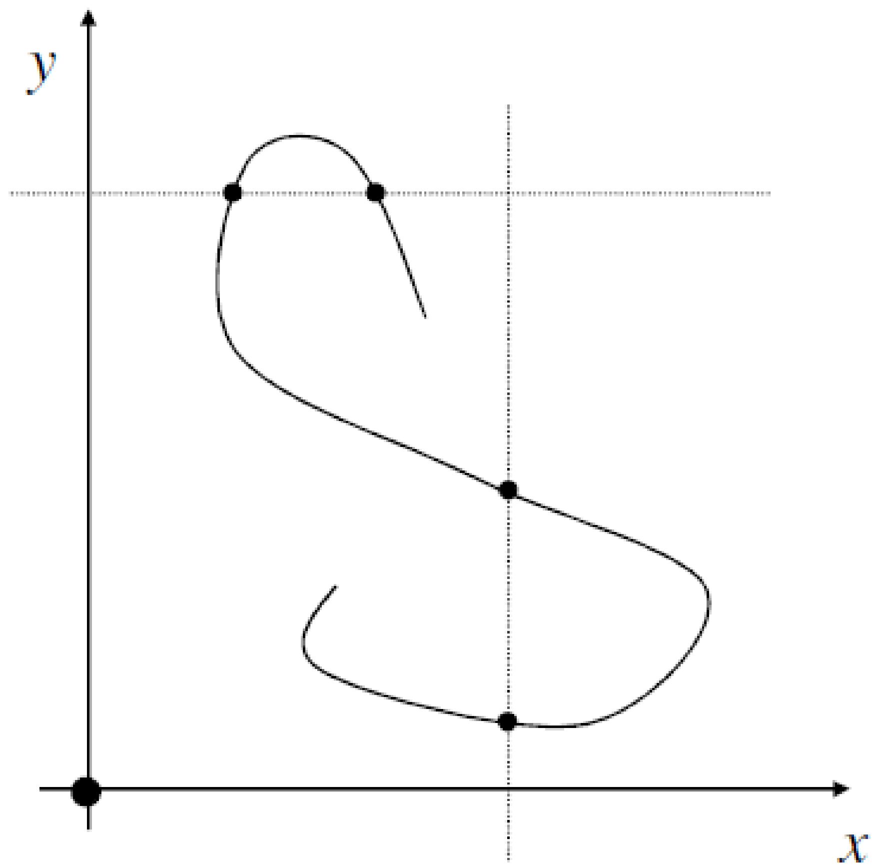
Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Independência dos eixos usados



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

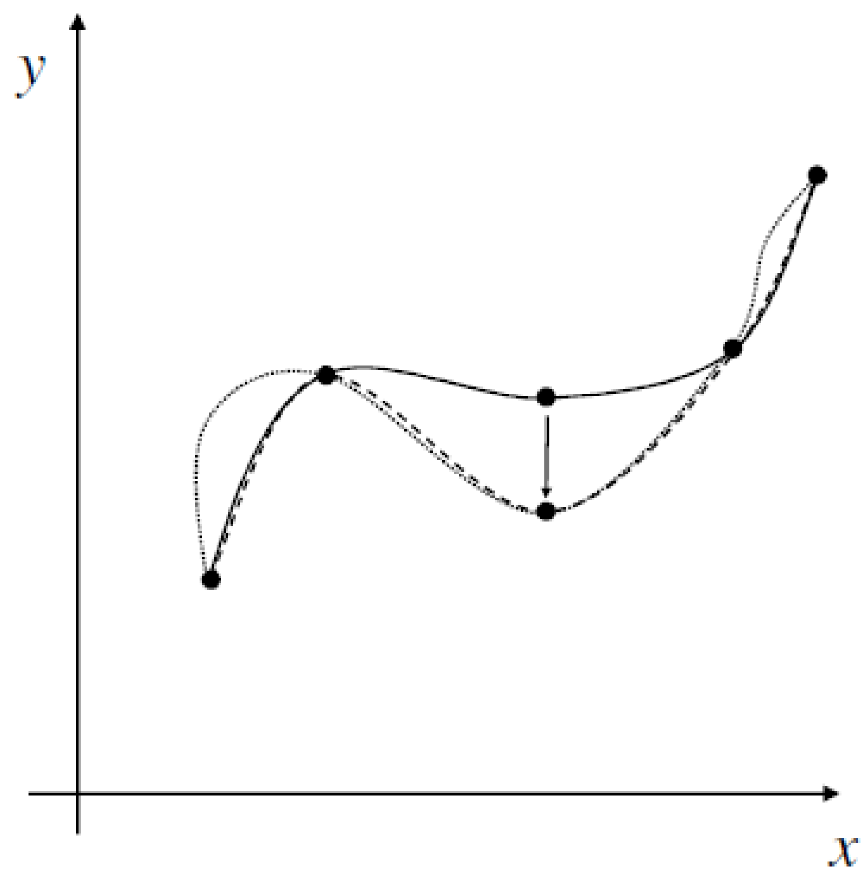
Deve poder ter Pontos com coordenadas Múltiplas em **x** ou **y**



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

Devem ter uso **intuitivo** e poder ter **Controle local**:

i.e. possibilitar haverem **ajustes finos** (**e.g.** ao se alterar um trecho não altera toda a curva)

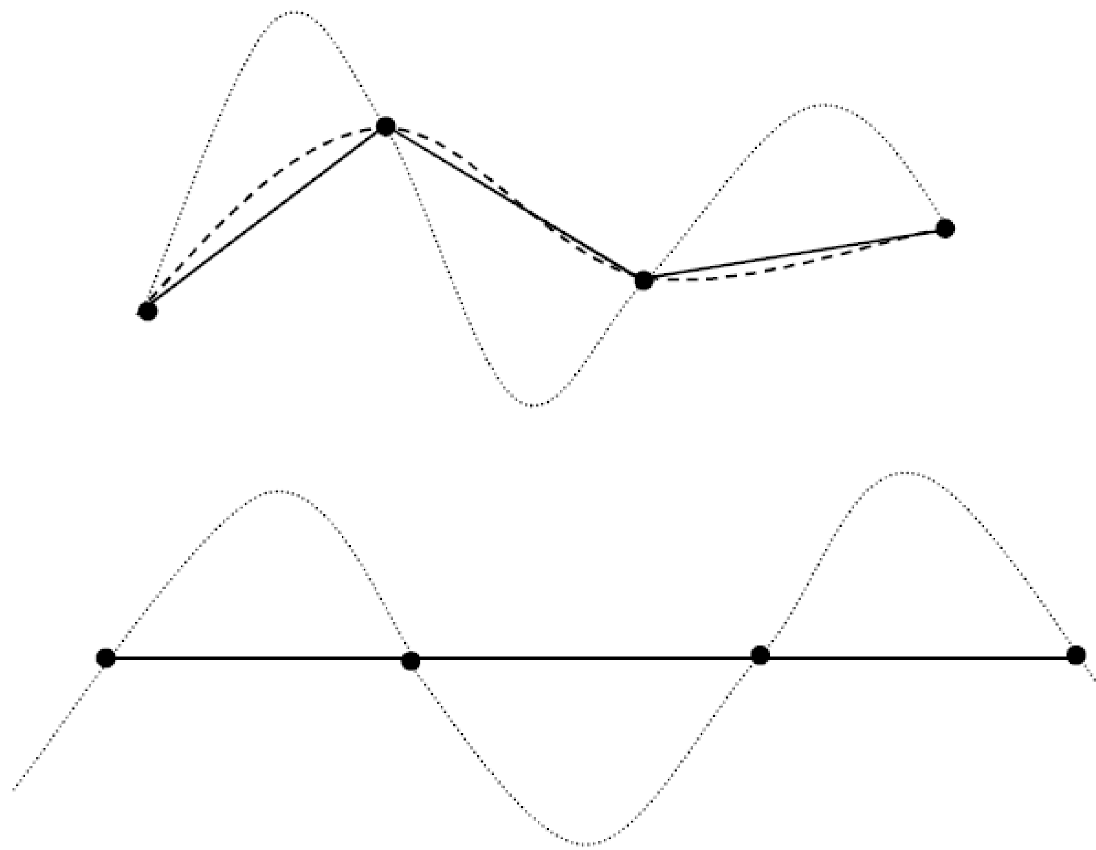


Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

- O número de pontos de

Controle local

não deve estar associado **ao grau da curva** ou sua oscilação

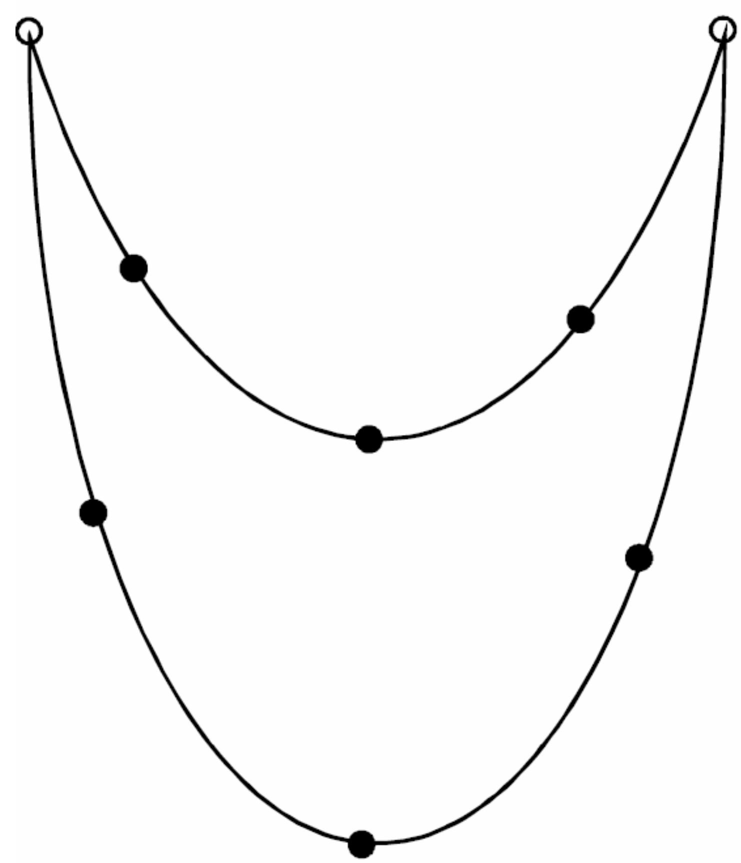


polinômio de grau elevado

formas com oscilações

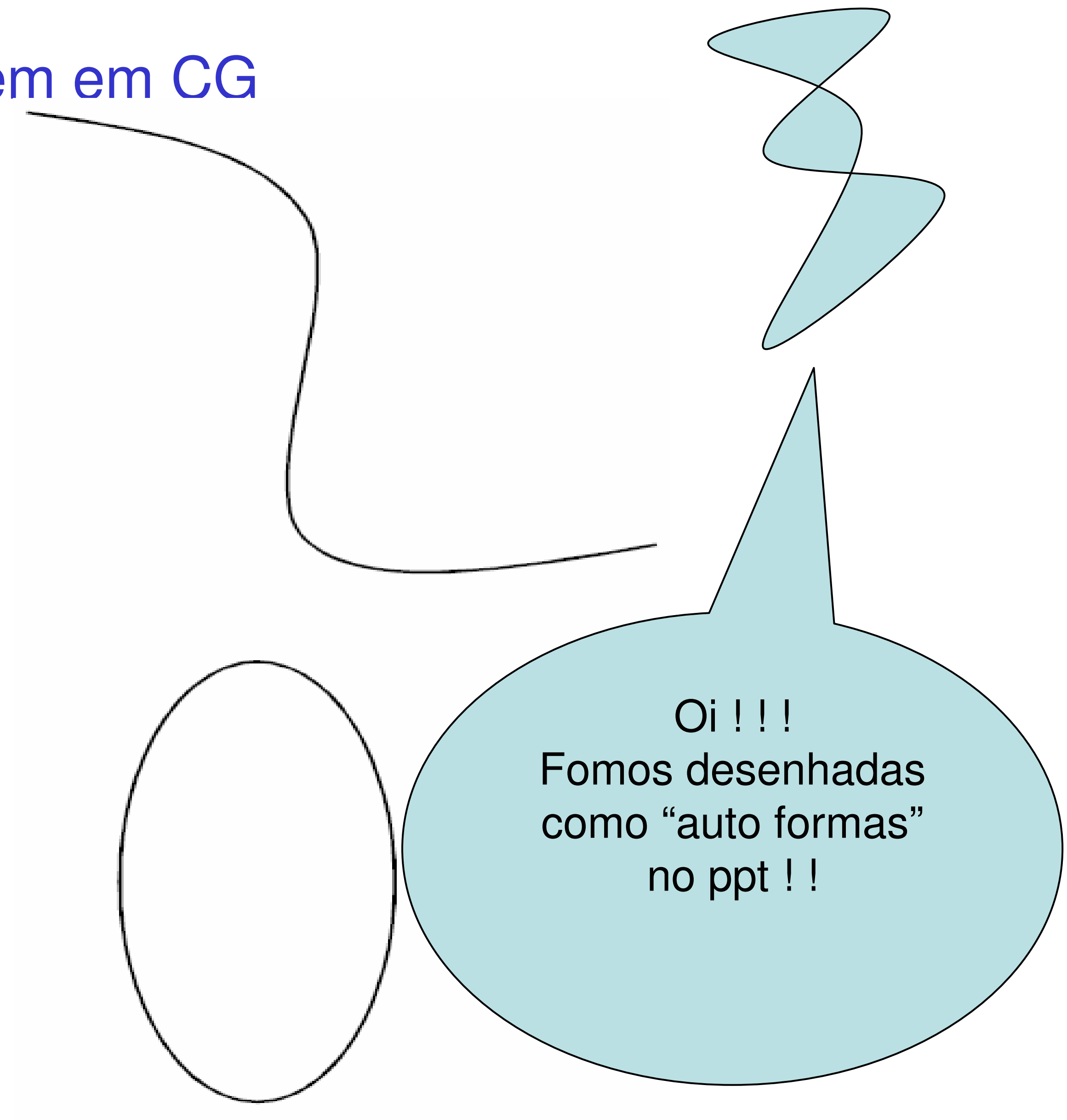
Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

- Ser possível representar diversos graus de continuidades que o usuário desejar



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

- Ser possível representar curvas abertas, fechadas, com pontos de inflexão, etc. : ter a **versatilidade** que o usuário desejar



Propriedades desejáveis de curvas para modelagem em CG

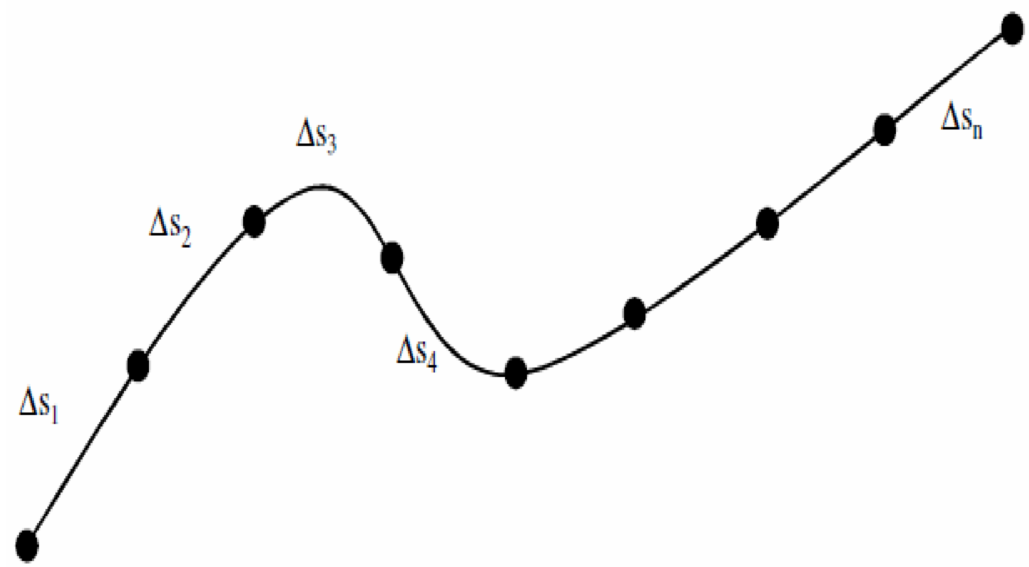
ter pontos

com distâncias ≈ constantes ao longo do seu

comprimento = parâmetro

uniformemente

distribuídos.



$$\Delta s_i \approx \Delta s_j$$

Solução desenvolvida para em CG

Curvas de formas livres

Representadas por uniões

Descritas por polinômios

Parametrizados

Até o grau 3

Com continuidade paramétrica

Porque polinômios até terceiro grau?

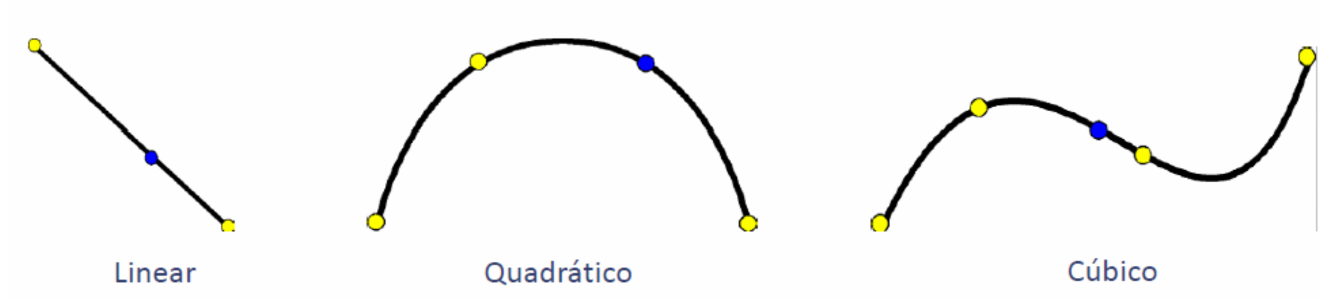
Quanto mais simples a equação da função de interpolação, mais rápida sua avaliação.

Polinômios são fáceis de avaliar

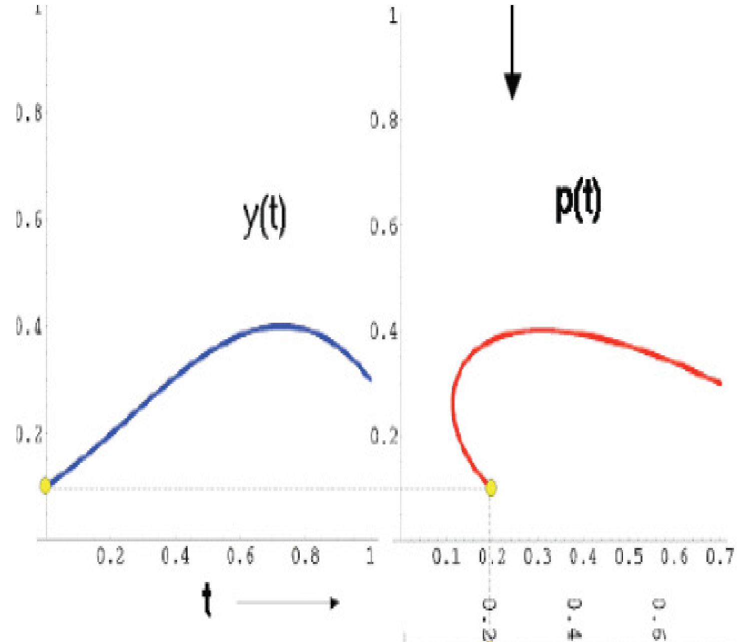
Grau menor que 3: Pouca flexibilidade.

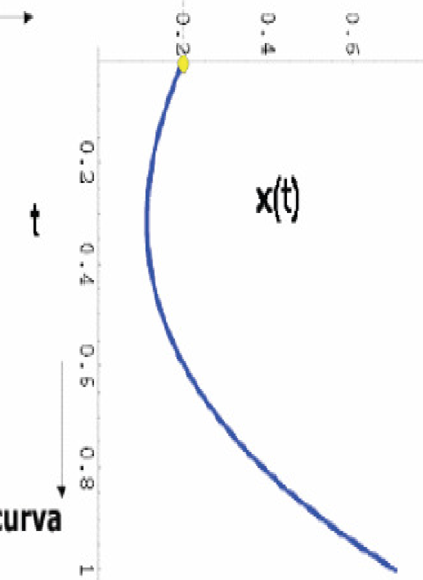
Grau maior que 3: Maior custo computacional com pouca vantagem prática.

$$f(t) = at + b \qquad f(t) = at^2 + bt + c \qquad f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



Curvas Paramétricas Cúbicas 2D





8 parâmetros para cada curva

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

Os valores de ax,bx, etc devem ser definidos para cada curva

Curva polinomial paramétrica:

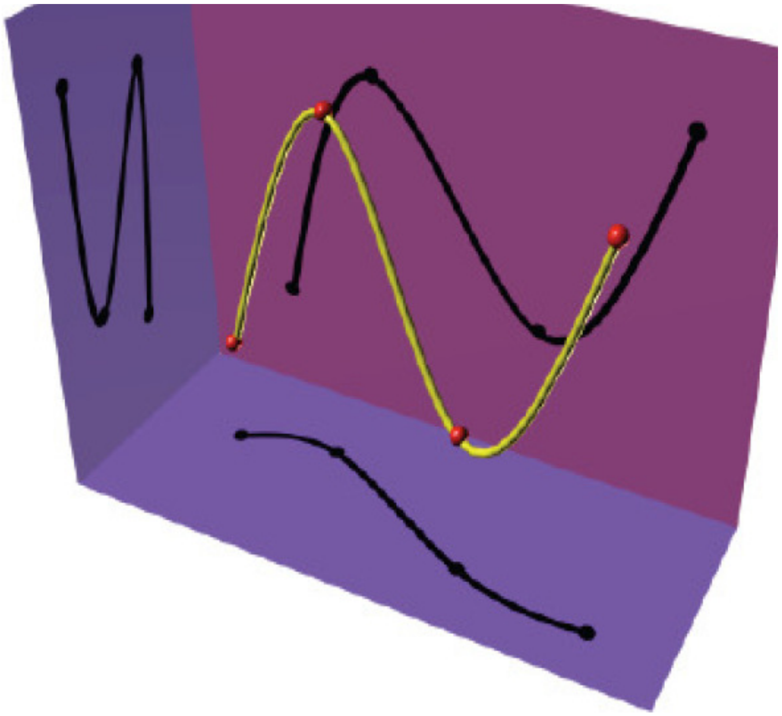
$$P(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_k u^k$$

Em 3D

$$\begin{cases} x(u) = c_{0x} + c_{1x} u + c_{2x} u^2 + \ldots + c_{kx} u^k \\ y(u) = c_{0y} + c_{1y} u + c_{2y} u^2 + \ldots + c_{ky} u^k \\ z(u) = c_{0z} + c_{1z} u + c_{2z} u^2 + \ldots + c_{kz} u^k \end{cases}$$

Em 3D

12 parâmetros para cada curva



$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$
$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

De forma genérica

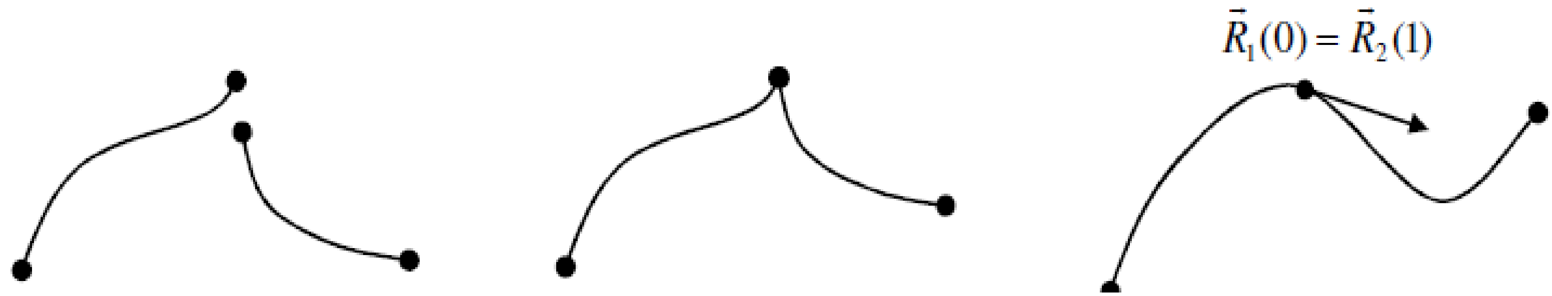
$$\mathrm{p}(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 = \sum_{k=0}^{3} c_k u^k$$

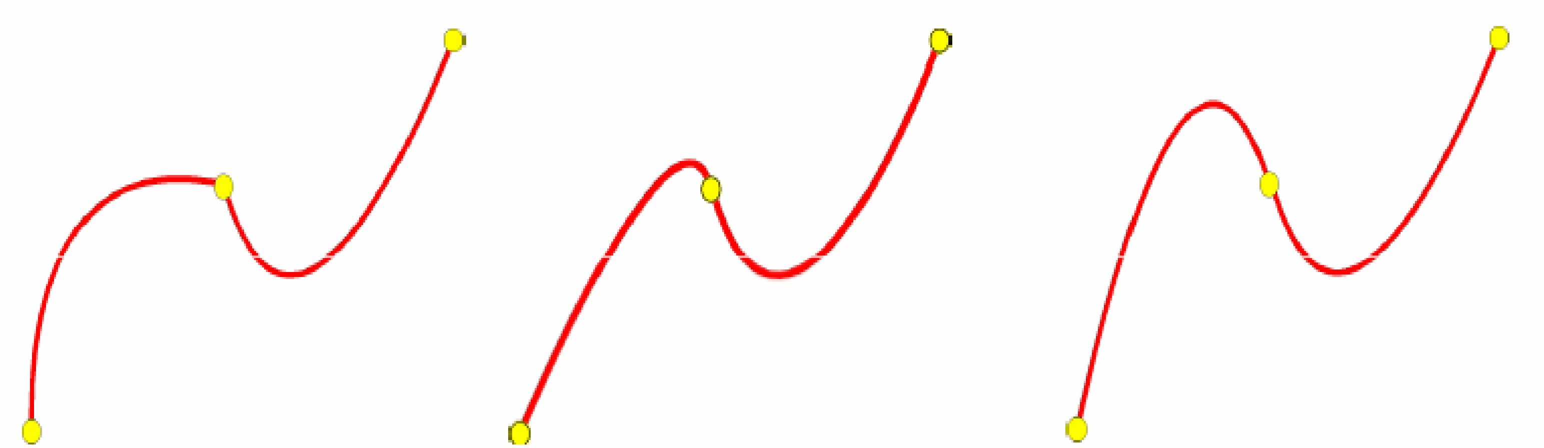
onde

$$\mathrm{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}, \qquad c_k = \begin{bmatrix} c_{kx} \\ c_{ky} \\ c_{kz} \end{bmatrix}$$

Graus de Continuidade

geométrica



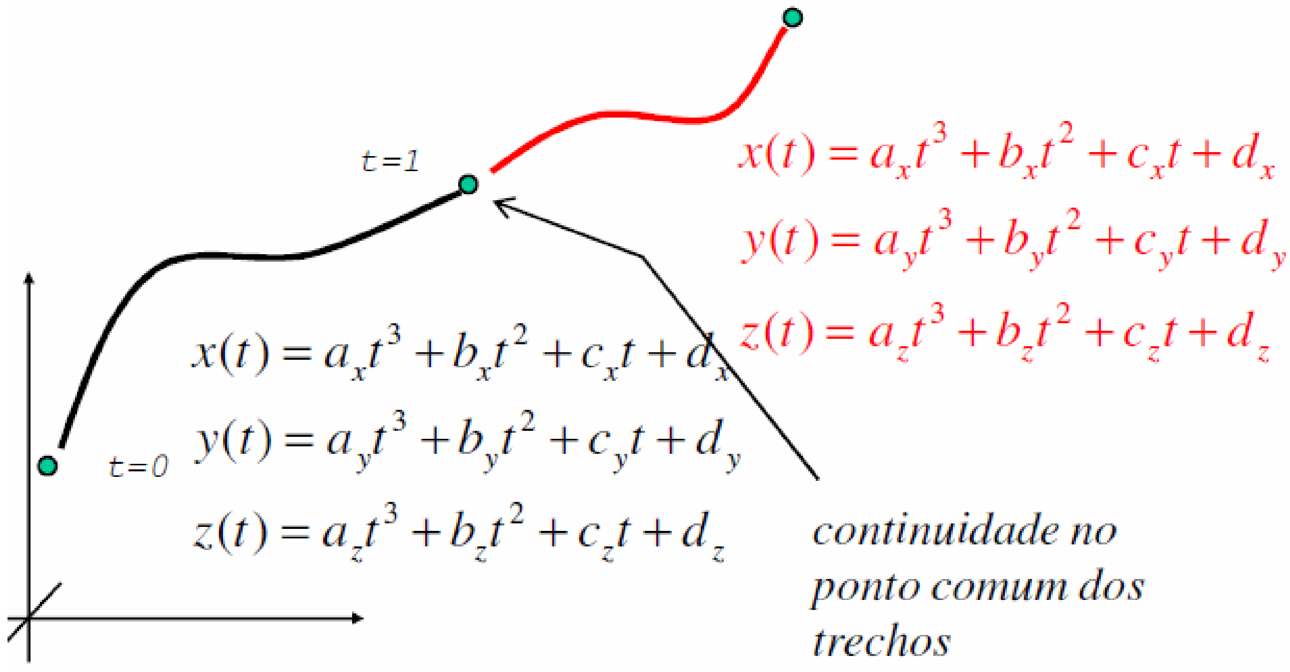


Dois segmentos se encontram em um ponto

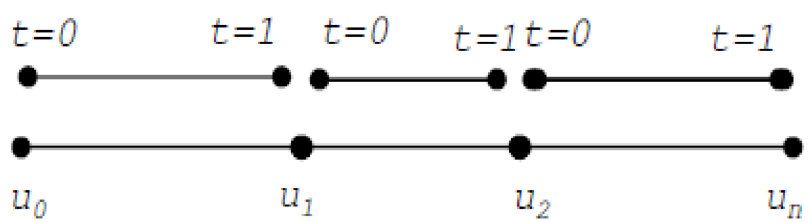
Direção das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção

Direção e **magnitude** das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção

Com continuidade paramétrica



Parametrização



$t \in [0,1]$ *local*

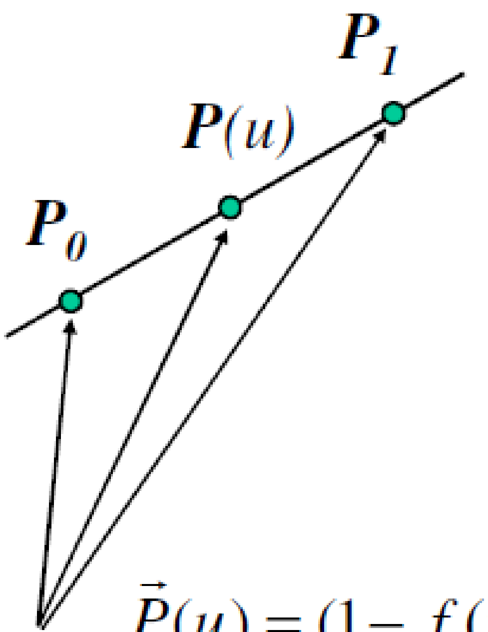
ou

$u \in [u_0, u_n]$ *global*

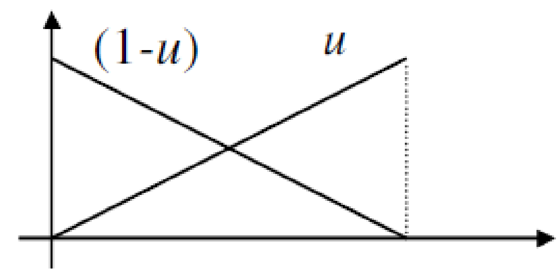
Requisitos para os parâmetros:

Parâmetro genérico: u

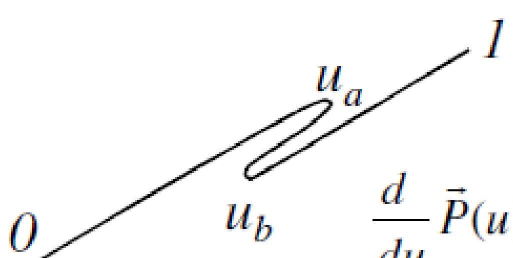
Parâmetro de comprimento: $s = s(u)$



$$\vec{P}(u) = (1-u)\vec{P}_0 + u\,\vec{P}_1$$



$$\vec{P}(u) = (1 - f(u))\vec{P}_0 + f(u)\,\vec{P}_1$$



$$\frac{d}{du}\vec{P}(u) = 0$$

Com continuidade paramétrica

$$Se\ u_2 > u_1 \Rightarrow s(u_2) > s(u_1)$$