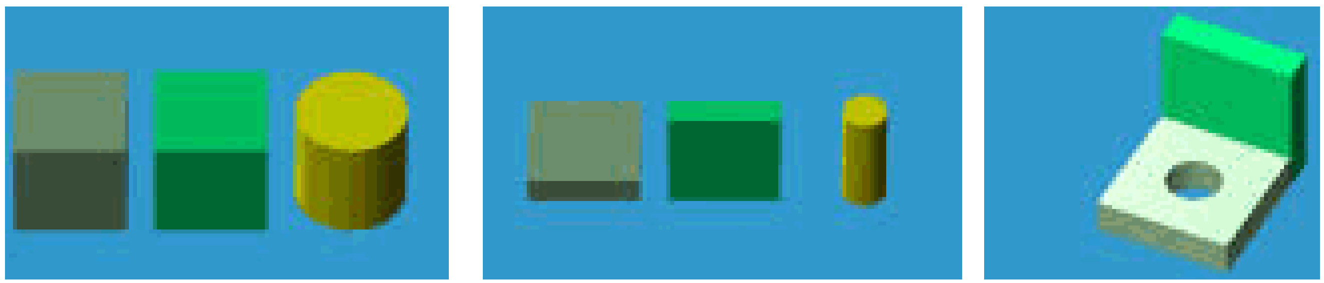
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap4.html



Solid modeling em C.G.

aula 12

2016/2 – IC / UFF

que é um sólido.

é considerado um sólido se tem uma forma própria.

A modelagem de líquidos, gazes, materiais flexíveis ou de coisas que não tenham forma própria (roupas, tecidos, plásticos, gel e outros) é também necessária e representável em computação gráfica.

Mas não é assunto da **Modelagem de Sólidos**

sólido é algo essencialmente **tridimensional (3D)**.

Definição: Um **sólido** é um subconjunto *fechado* e *limitado* do espaço Euclidiano tridimensional: E^3

sólido é um elemento da geometria **Euclidiana,** geometria formulada pelo matemático grego Euclides, que viveu na Alexandria no século III A.C.,

Há outras geometrias?

Sim, muitas, por exemplo

A geometria não-euclidianas desenvolvidas por **Lobatchevski**

(Nicolai Ivanovitch Lobachevski, matemático russo: 1793-1856) e

Riemann

(Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemão: 1826-1866).

Fechado? Limitado ?

um sólido é **fechado** **=>** tem todos os seus pontos de contorno, tem um interior e exterior.

Limitado está associado à idéia de

não ser Infinito no sentido de realmente não ter fim, e não apenas de ser muito grande.

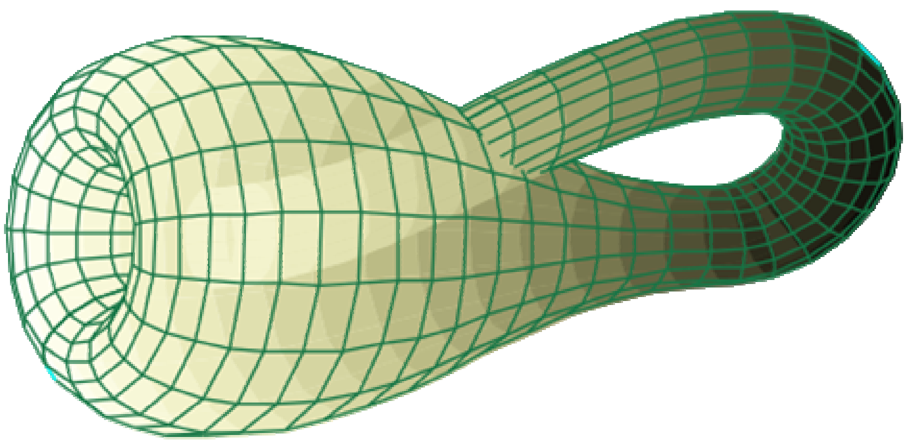
SÓLIDOS

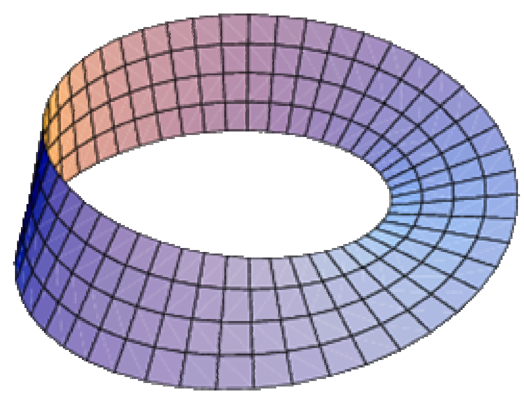
Modelos realizáveis e não realizáveis

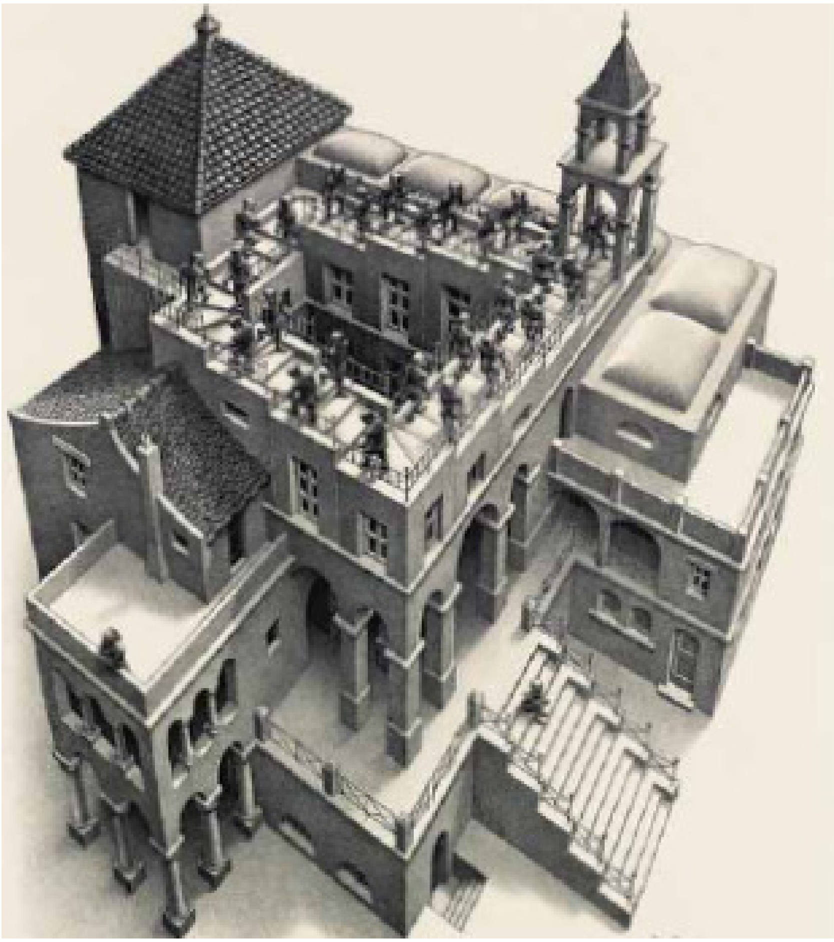
A **garrafa de Klein** é um exemplo de uma as estruturas não orientáveis como a **faixa de Möbius**.

São exemplos de sólidos não realizável.

Operadores de Euler = grupo pequeno de **operações** (e suas **inversas**) que permitam a modificação dos modelos B-Rep, seguras o bastante **para não produzirem modelos não orientáveis** ou **não realizáveis**.

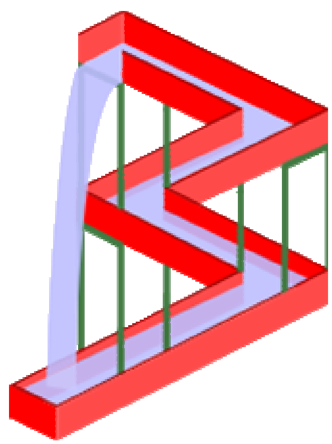




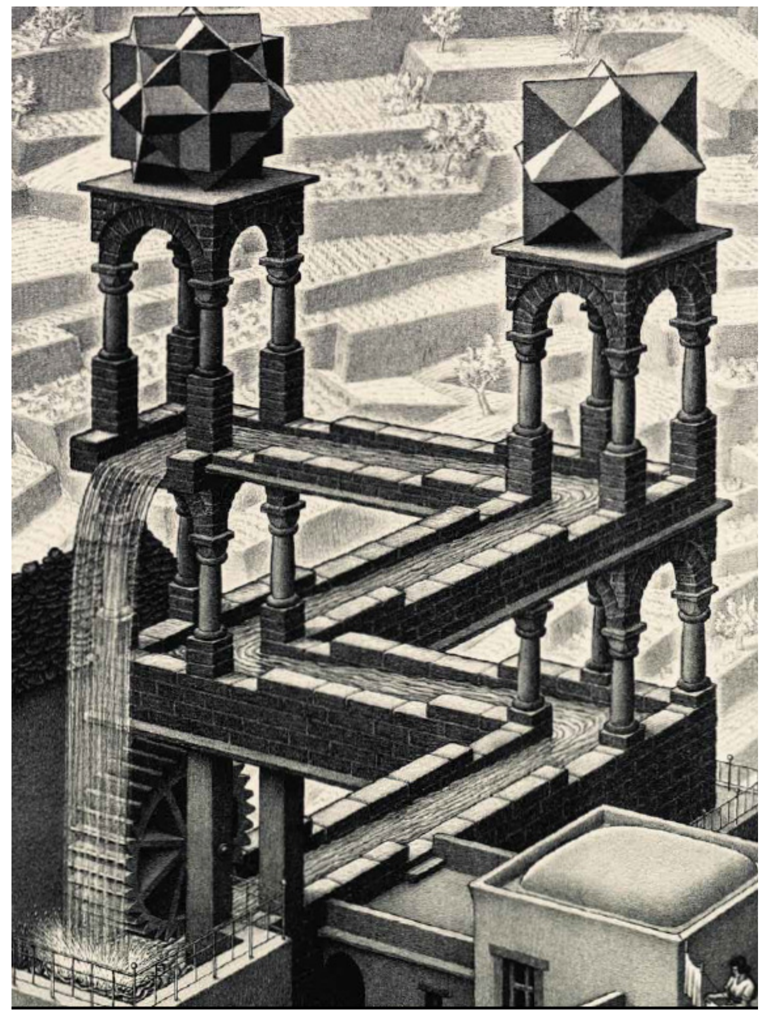


http://www.mcescher.com/

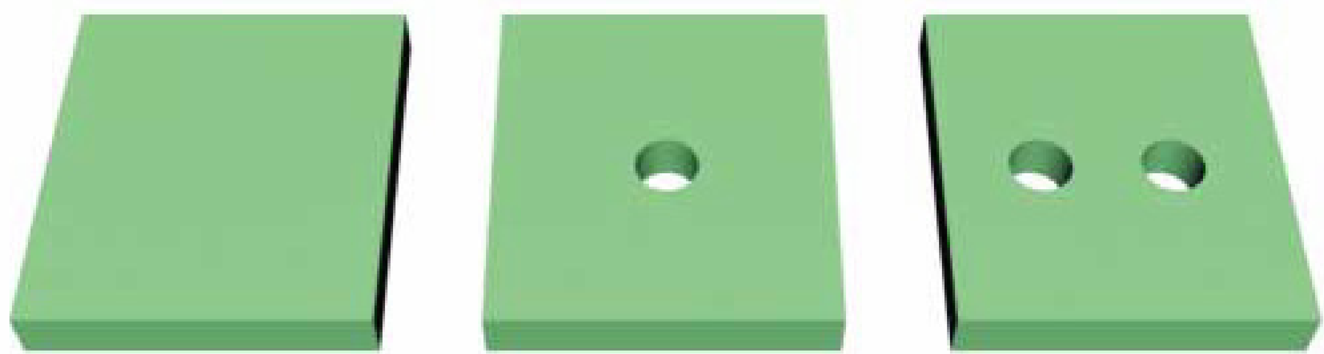
Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) artsta grc conhecido por desenhos que tendem a representar construções impossíveis



queda d'água de Escher

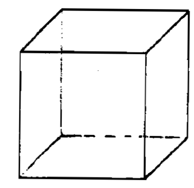


o número dos furos que trespassam o sólido é denominado de *genus*, G.



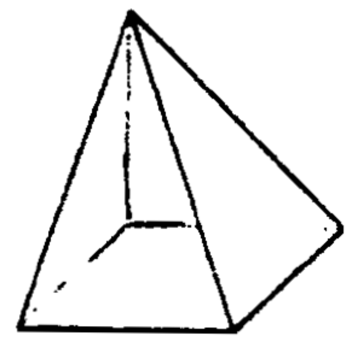
Formula ou lei de Euler:

(pronuncia-se "Óiler")



O grande matemático Leonhard Euler foi, para todos os efeitos, quem inaugurou um ramo da matemática chamado **topologia**.

Nasceu na suíça em abril de 1707, produziu suas maiores obras quando já estava idoso e **cego**.

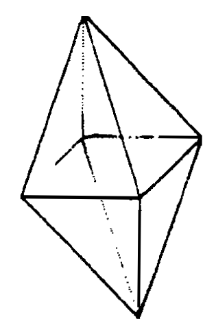


Em um objeto tridimensional vamos chamar o número de **faces de F**, o número de **arestas de E** e o número de **vértices de V**.

Euler provou que por mais que o objeto se transforme é sempre constante o que hoje chamamos de **número de Euler** definido assim:

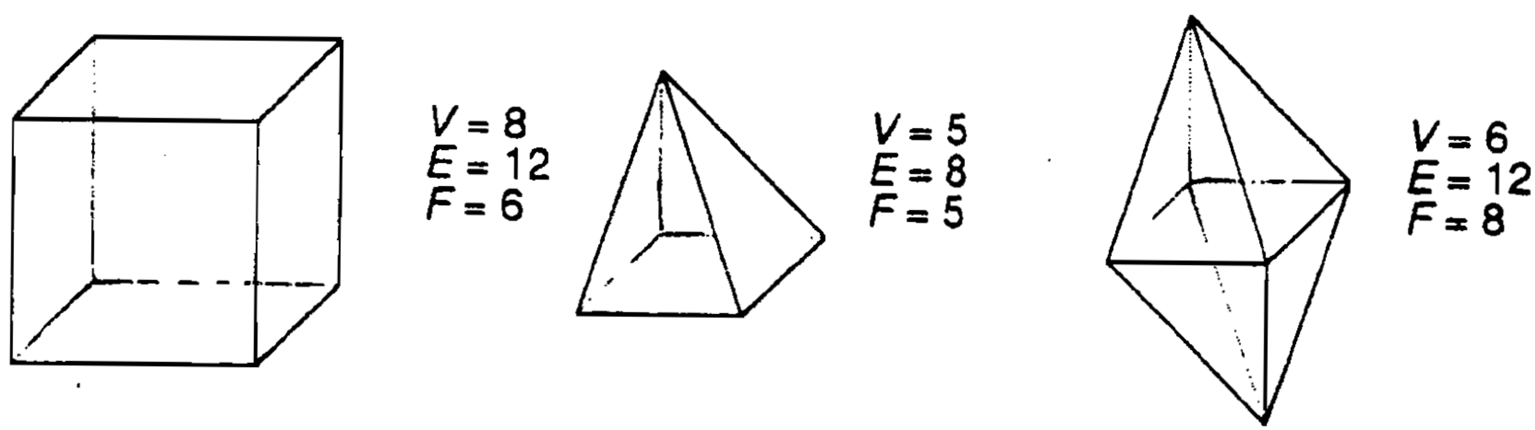
2 = F - E + V

Para a maioria dos sólidos.



$$V - E + F = 2$$

E = (*edges*) arestas



faces não planas

A fórmula de Euler é aplicável mesmo a objetos que não tenham faces planas como o cilindro mostrado . Neste caso, o conceito de faces deve ser

estendido para considerar toda as superfícies; as arestas devem ser entendidas como os limites entre as faces e os vértices definidos pelos limites das arestas.

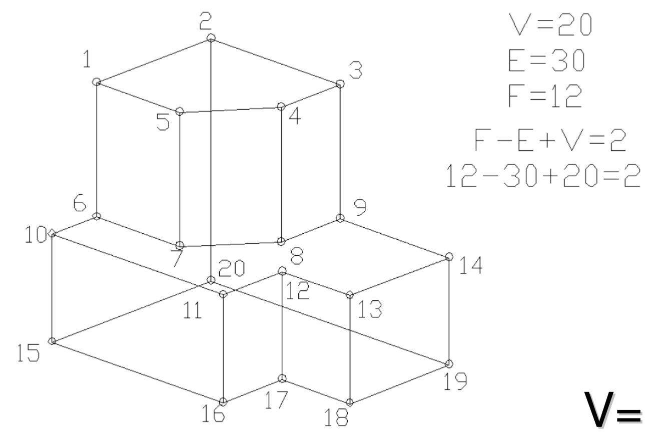
Assim, um cilindro pode ser considerado formado por: dois vértices, três arestas e três faces .

Uma esfera pode ser entendida a partir de um caso limite do cilindro, quando as faces planas e as arestas que as limitavam desaparecem e a aresta antes reta, vai se deformando até formar uma semi circunferência limitada pelos dois vértices, de modo que a figura passa a ser formada por uma única face, só uma aresta e dois vértices.

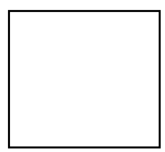
Leonhard Euler

Fórmula ou lei de Euler:
V-E+F=2

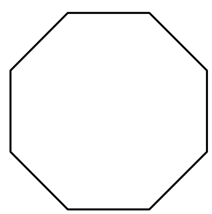
(1707-1783)



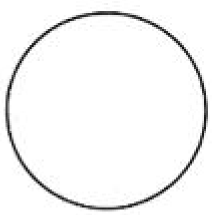
V=E=4 F=2

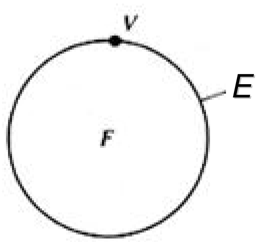


V=E=8 F=2

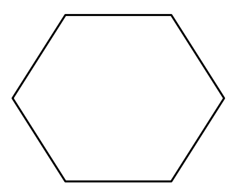


V=E=1 F=2

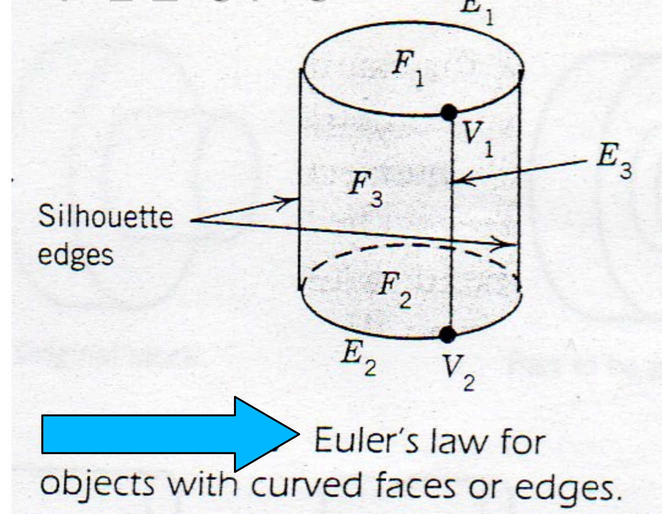




V=E=6 F=2



V=2 E=3 F=3



Euler's Law

NÚMERO DE EULER

$$N_E = V - E + F$$

Imagine que o cubo é feito de massa de moldar.

Com jeito, é possível transformá-lo em uma esfera, uma pirâmide ou uma batata doida sem rasgar nem cortar nada.

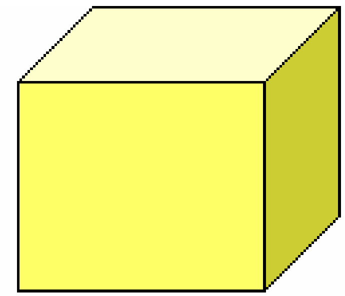
Isso só é possível com objetos **topologicamente iguais**.

O cubo tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

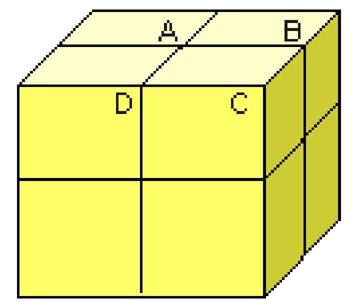
Portanto, o número de Euler do cubo é: $N_E(\text{cubo}) = 6 - 12 + 8 = 2$.

O teorema de Euler diz que:
o número de Euler é **constante**

para uma superfície qualquer.



Isso quer dizer o seguinte: suponha que você **divide cada face do cubo em 4 partes**, traçando 2 segmentos de reta perpendiculares entre si



Agora, pontos como (A) ou (B) serão considerados **novos vértices**, linhas como (AB) serão **novas arestas** e áreas como (ABCD), **novas faces**.

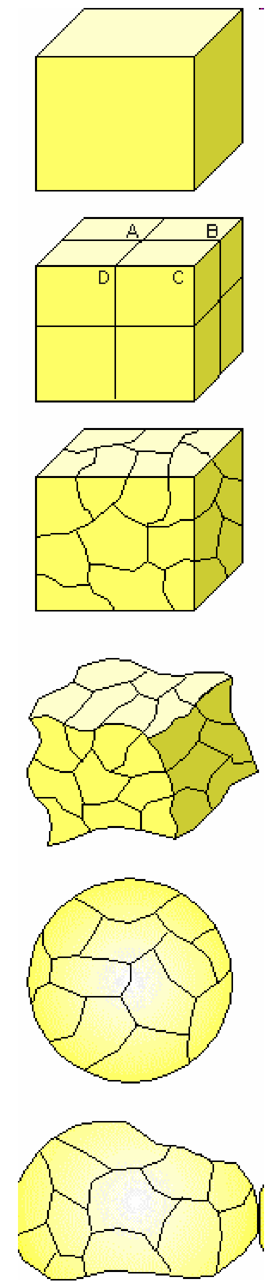
Pois conte os novos números de faces, arestas e vértice.

Você obterá: F´ = 24, E´ = 48 e V´ = 26.

E, terá:

$N_E{}' = F' - E' + V' = 24 - 48 + 26 = 2$ **!!! Inalterado**

O resultado é o mesmo de antes.



Pois acredite: mesmo se você **desenhar linhas malucas sobre o cubo**, criando uma porção de novas arestas, vértices e faces, obterá sempre o mesmo número de Euler: 2.

Você pode constatar que o número de Euler continuará o mesmo até quando o cubo for **deformado** como mostra a figura.

E a deformação pode ser tal que o cubo acabe virando uma **esfera** ou mesmo uma **batata** toda cheia de "calombos", ou até um "pão árabe".

Tecnicamente, diz-se que o cubo, a esfera e a batata são todas **superfícies topologicamente idênticas**.

Todas têm o mesmo número de Euler: 2.

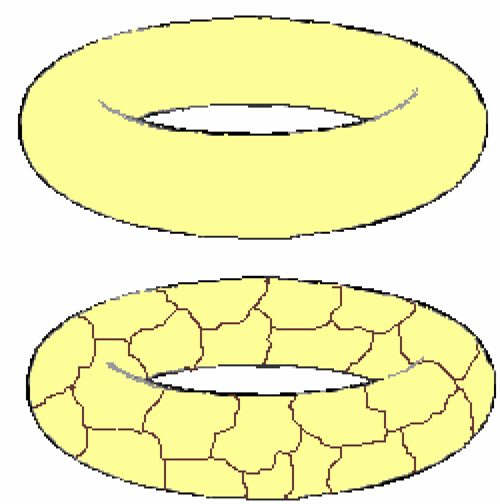
Imagine que o cubo é feito de massa de moldar, que as crianças brincam.

Com jeito, é possível transformá-lo em uma esfera, uma pirâmide ou uma batata sem rasgar nem cortar nada. Isso só é possível com objetos topologicamente iguais.

A coisa muda se o objeto tiver um furo.

O objeto furado mais “amado” pelos matemáticos é o **toro**, uma coisa com forma de “rosquinha” ou de “biscoito globo”.

Se a gente fizer sobre a superfície do toro o mesmo que fizemos sobre a superfície do cubo (traçando linhas que formam faces, arestas e vértices) e depois fizermos as contas, acharemos um **número de Euler nulo**!

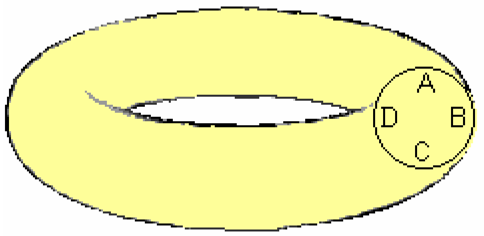


N_E (toro) =0

O toro, e qualquer superfície com um furo, é

topologicamente diferente do cubo e da esfera.

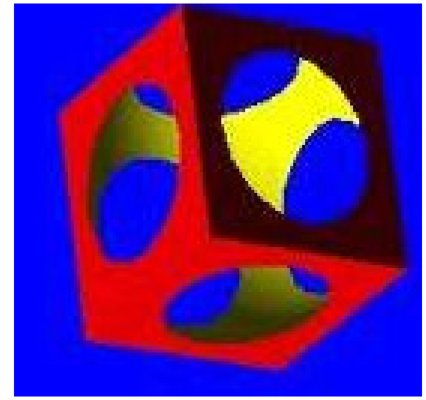
Isto é: Não dá para transformar uma esfera de massa em um toro **sem cortar ou rasgar** alguma coisa.

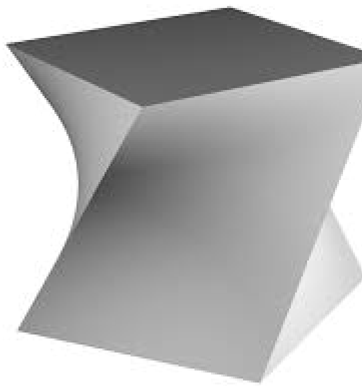


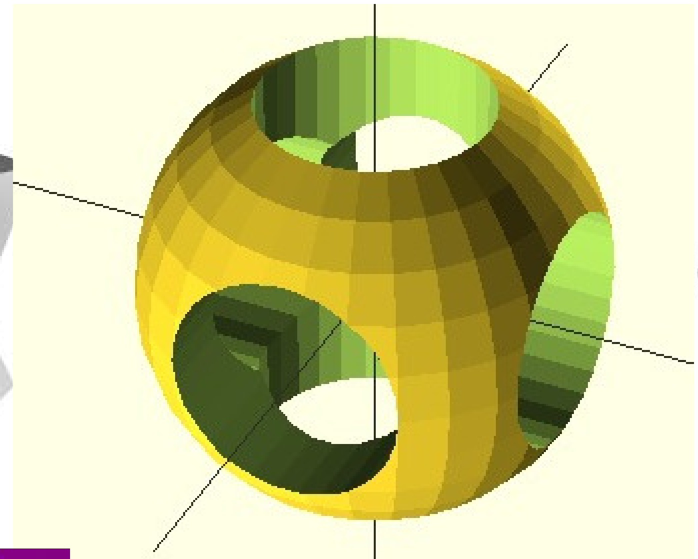
Topologicamente equivalentes:

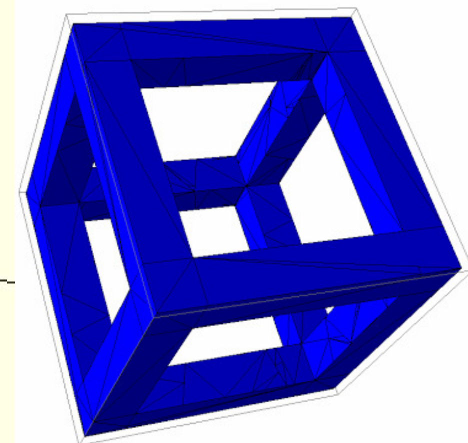
Rubber sheet deformation

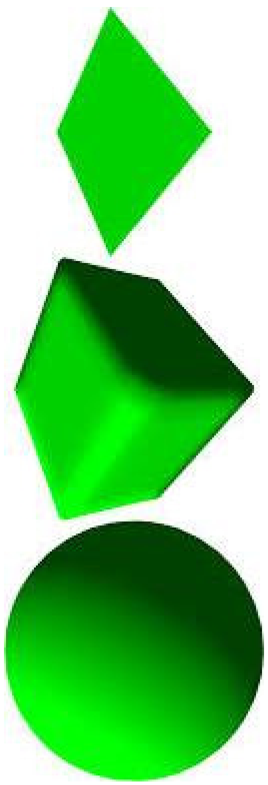
Massinha de modelar

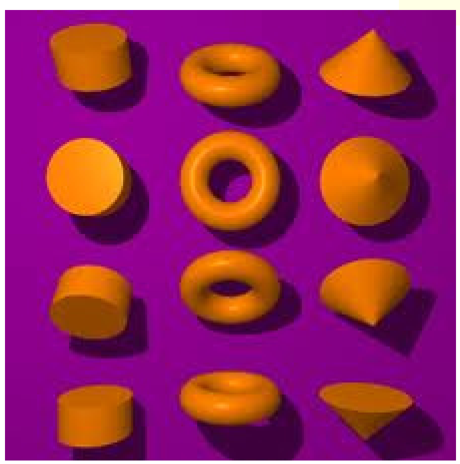


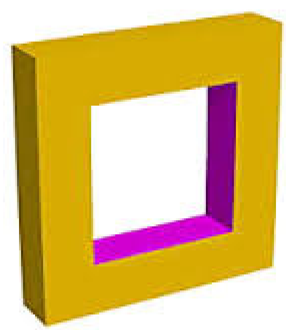




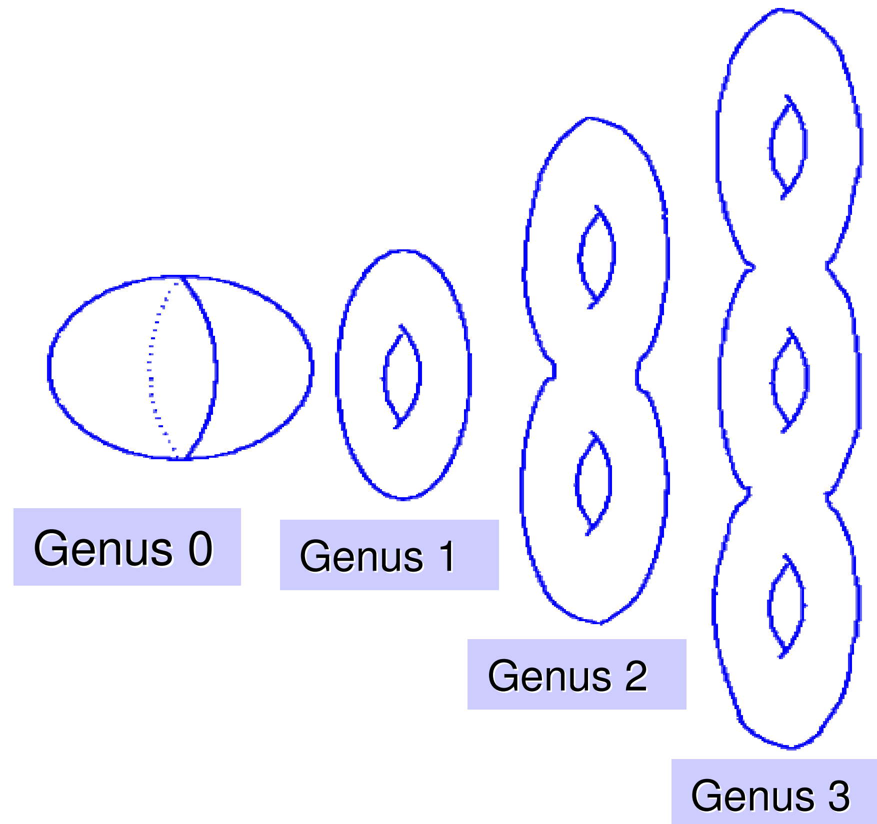






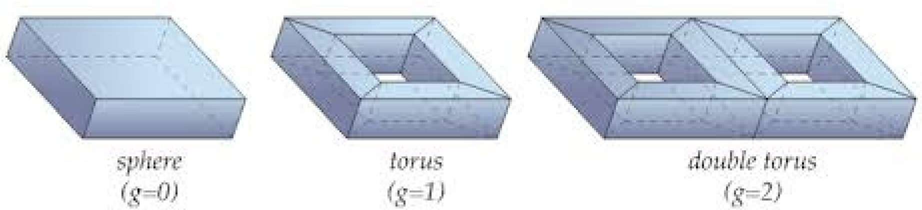


Topologicamente equivalentes:
Rubber sheet deformation
Massinha de modelar



Op. Topológicas Locais

Op. Topologicas Globais = mudam o genus . Como a soma de dois torus

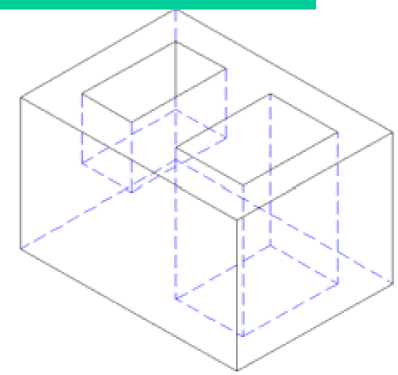


Se o objeto tem componentes múltiplos S ou C ≠ 1 , G (genus) é a soma dos Gs de cada objeto

Euler-Poincare Law:

V - E + F - L = 2(S - G)

- L = # of inner face loops (a loop contained entirely within another face loop)
- S = # of shell bodies (sometimes "C")
- G = # thru holes, A.K.A genus (# of passage features)



V	-	E	+	F	-	L	= 2 (	S	–	G)
24	-	36	+	15	-	3	= 2 (	1	-	1)

Jules Henri Poincaré (1854–1912).
considered to be one of the founders of the field of Topologia

Quando a superfície tem buracos a expressão para o número de Euler fica sendo:

$$N_E = F - E + V - H = 2\,(C - G),$$

sendo **H** - o número de buracos superfície ou faces

C- o número de partes separadas

G - o número de furos trespassantes .

E é chamado de Euler/Poincaré

Para esfera ou um cubo, $G = 0$, logo, $N_E = 2$.

Para o toro, $G = 1$, logo, $N_E = 0$.

Com mais de um buraco, o número de Euler fica negativo.

$$V - E + F - H = 2\,(C - G)$$

where V is the number of vertices,

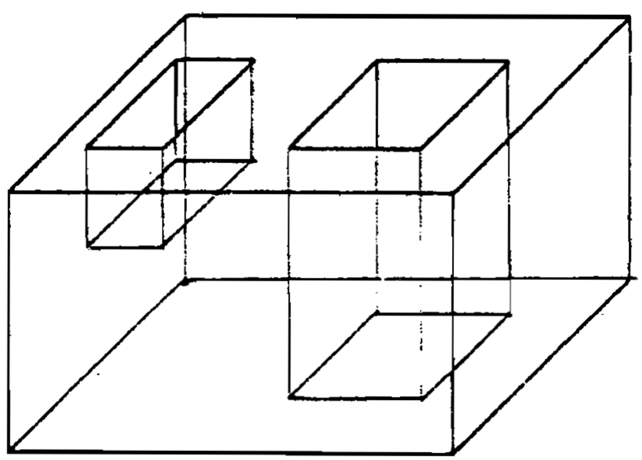
E is the number of edges,

F is the number of faces,

H is the number of holes in the faces,

C is the number of separate components (parts),

G is the *genus* (for a torus $G = 1$).



V	$-\ E$	$+\ F$	$-\ H$	$= 2(C$	$-\ G)$
24	36	15	3	1	1

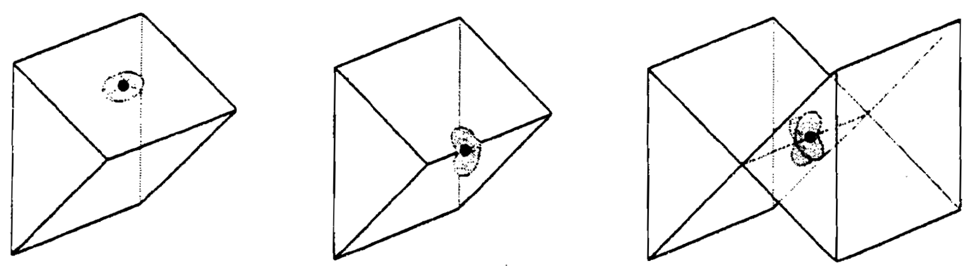
Definição:

Um manifold é um "espaço topológico" que é localmente Euclidiano (R^2 , d_E) (i.e., em torno de todo ponto tem uma vizinhança que é topologicamente equivalente a uma bola aberta) .

2-manifold = Sólidos cujos limites seja topologicamanete equivalentes a um disco

Limitações da maioria dos modeladores baseado em Limites (que é o que ocorrem em modelos físicos reais e não abstrações matemáticas)

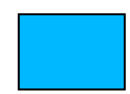
2-manifold. ="variedades de dimensão 2"



Sólido com superfícies non manifold

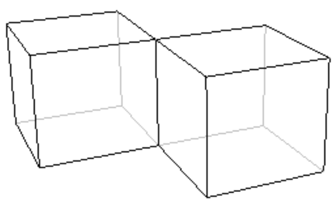
Superfícies non manifold x 2 manifold

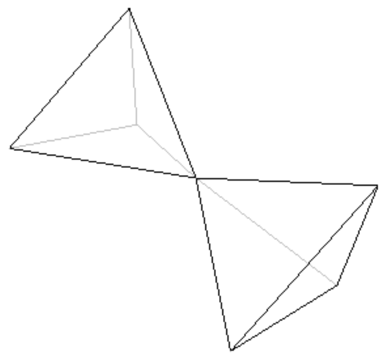
O conceito de *manifold* permite caracterizar de forma rigorosa uma importante classe de objetos geométricos de grande interesse no contexto da modelagem geométrica. Uma superfície *manifold* ou *2-manifold* é um espaço topológico onde cada ponto possui uma vizinhança aberta equivalente a um disco bidimensional. Isto quer dizer que, se analisada localmente numa área pequena o suficiente no entorno de um ponto dado, uma superfície existente num espaço tridimensional pode ser considerada “chata” ou plana. Pode-se dizer que deformando a superfície localmente para um plano, ela não rasga ou passa a possuir pontos coincidentes. Num poliedro *manifold*, cada aresta pertence a exatamente a duas faces.

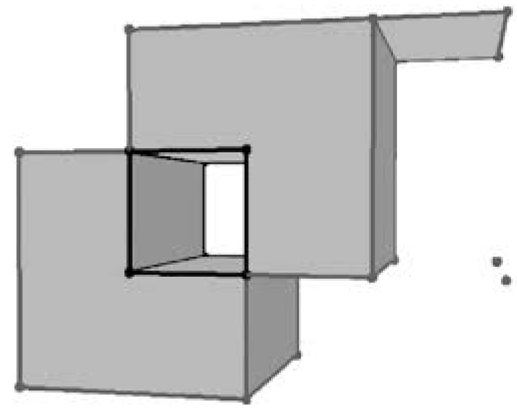


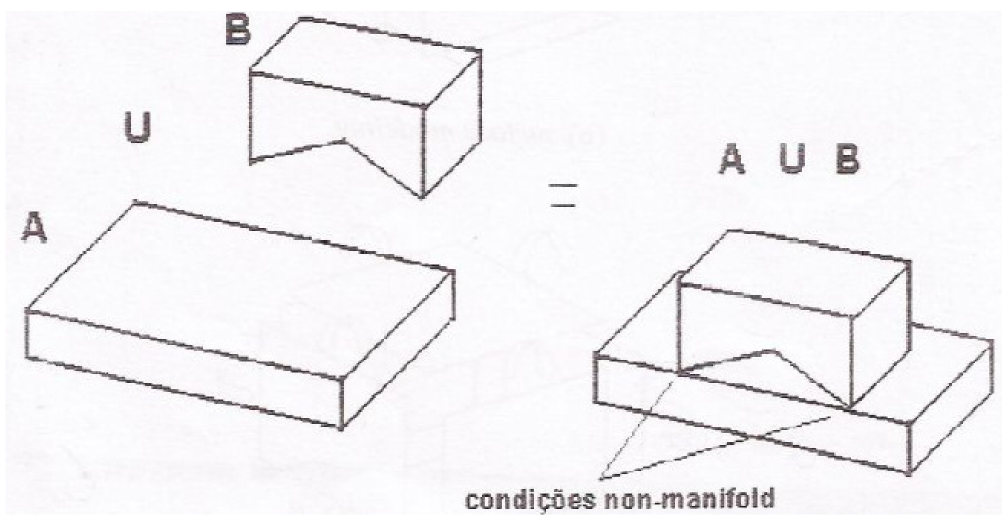
Ou seja se você for modelar uma folha , ela tem 2 faces , 4 vértices e 4 arestas.

um objeto *non-manifold* obtido como resultado da operação booleana de união de dois objetos *manifold*.





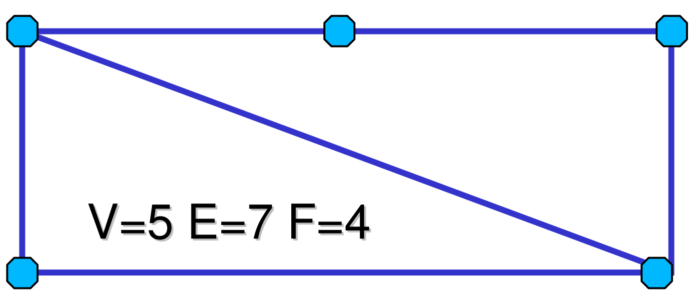




Exemplo de Operações Topologicas Locais

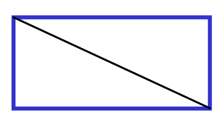
As propriedades topológicas de um modelo não são alteradas por **dividir** uma face em duas adicionando um lado , ou por **colar** duas faces em um lado comum.

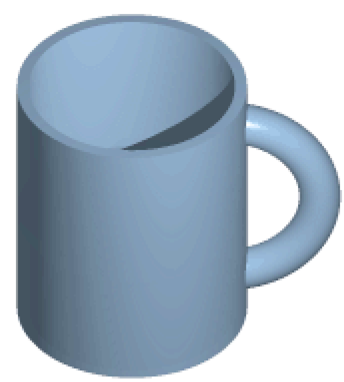
Se vértices ou **lados** forem subdivididos ou unidos.



V=E=4 F=2

V=4 E=6 F=4





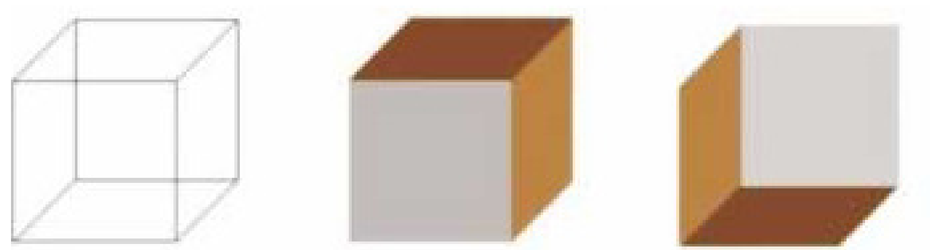
FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

Representação Aramada (Wire Frame)

representação ambígua com margem para várias interpretações;

dificuldade de realizar certas operações como a determinação de massa ou volume. e

não tem como garantir que o objeto desenhado seja um sólido válido,



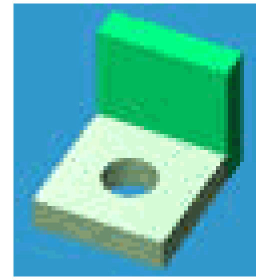
Representação por Faces (ou Superfícies Limitantes)

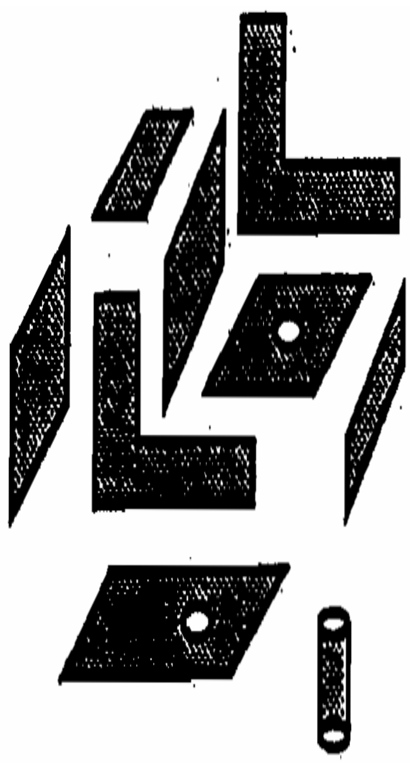
Essas superfícies são supostas fechadas e orientáveis.

Orientáveis = significa que é possível distinguir entre dois lados da superfície, de modo que um esteja no interior e o outro no exterior do sólido.

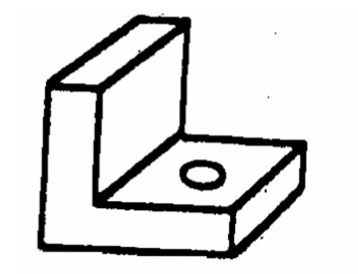
Formula ou lei de Euler-Poincaré:
V-A+F-H=2(C-G)

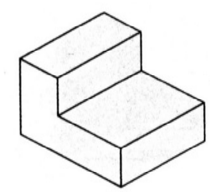
H= loops de faces fechadas;
C= numero de partes separadas do objeto
G= numero de buracos (genus)





Boundary representation
B-rep





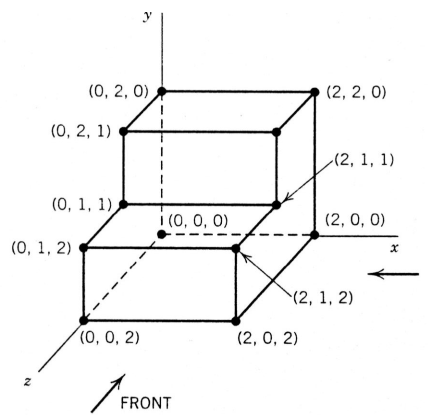
Descrição da:

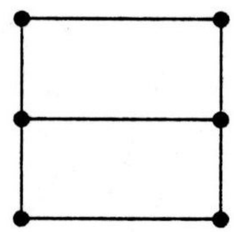
topologia e a **geometria** das faces.

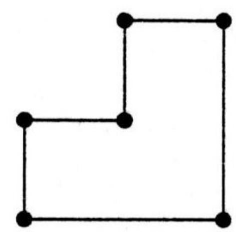
relações entre os elementos

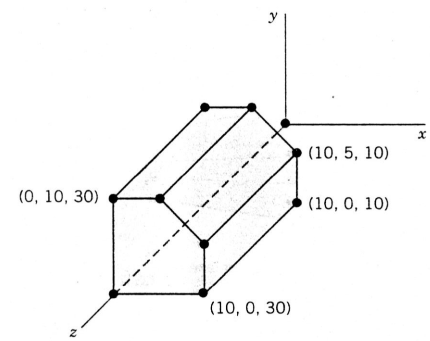
posições dos elementos no espaço, e sua forma geométrica (semi-reta, arco de círculoetc)

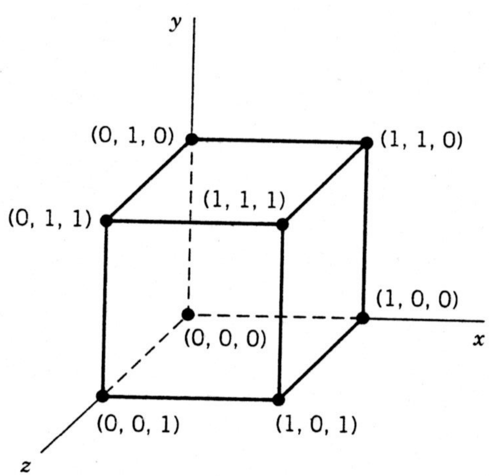
Geometria x topologia



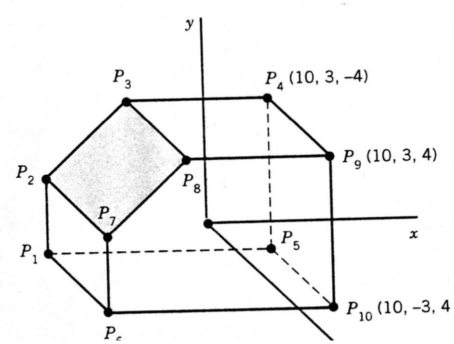








$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[P] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & 1 & -4 & 1 \\ -8.5 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & -3 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 4 & 1 \\ -8.5 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

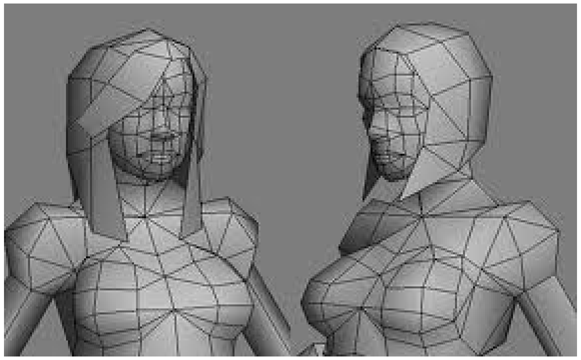
Representação dos limites do sólido

Boundary Representation – Brep

É a forma mais usada

Muito vezes confundida com a modelagem de superfícies, mas agora **toda a topologia é considerada para garantir que o objeto seja realizável e continue realizável após as operações que serão realizadas nele**.

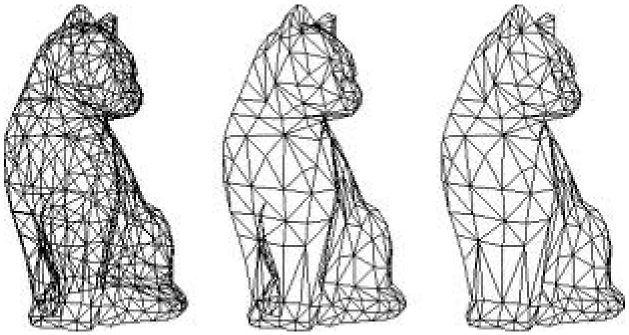
Agora a topologia deve ser validada não só a geometria gerada (Equação de Euler)



estrutura de dados do objeto.

Data structure

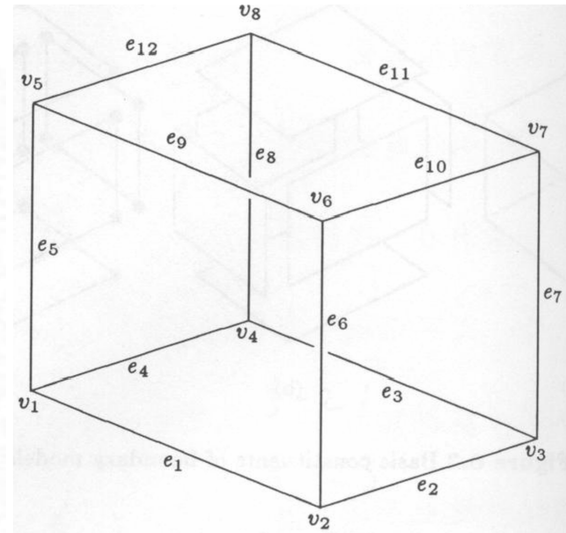
- **Polygon-based (Face list)**
- **Vertex-based**
- **Edge-based**

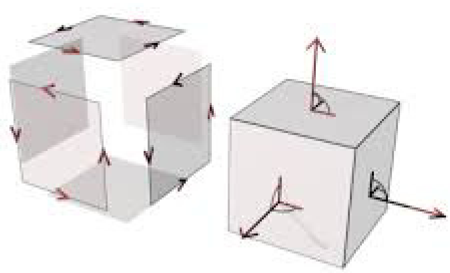


Estrutura de dados baseada em Vértice

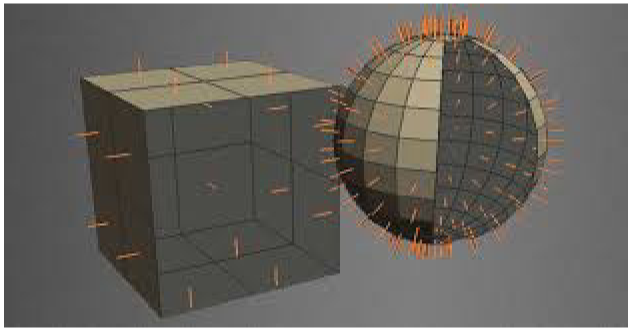
vertex	*coordinates*
v_1	$x_1\ y_1\ z_1$
v_2	$x_2\ y_2\ z_2$
v_3	$x_3\ y_3\ z_3$
v_4	$x_4\ y_4\ z_4$
v_5	$x_5\ y_5\ z_5$
v_6	$x_6\ y_6\ z_6$
v_7	$x_7\ y_7\ z_7$
v_8	$x_8\ y_8\ z_8$

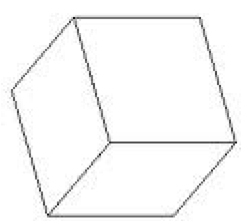
face	*vertices*
f_1	$v_1\ v_2\ v_3\ v_4$
f_2	$v_6\ v_2\ v_1\ v_5$
f_3	$v_7\ v_3\ v_2\ v_6$
f_4	$v_8\ v_4\ v_3\ v_7$
f_5	$v_5\ v_1\ v_4\ v_8$
f_6	$v_8\ v_7\ v_6\ v_5$

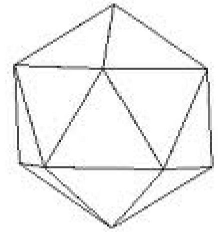


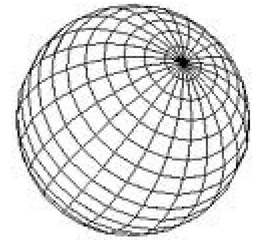


os vértices limites das faces devem ser descritos sempre no mesmo sentido horário (ou anti-horário) do exterior do objeto, para todas as faces.



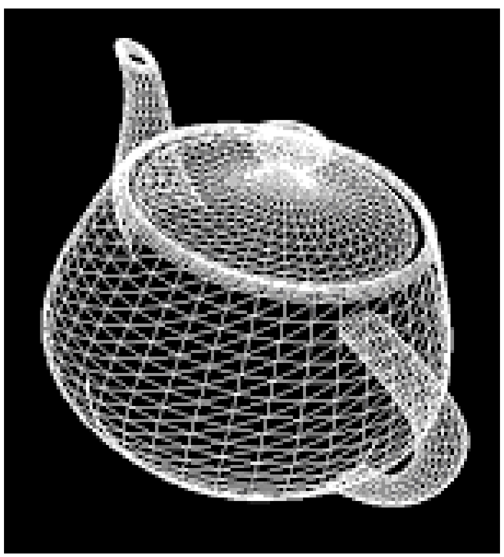


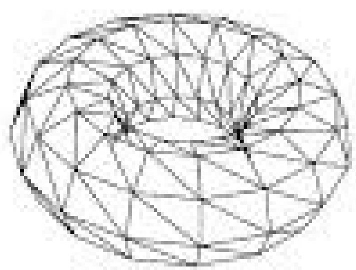


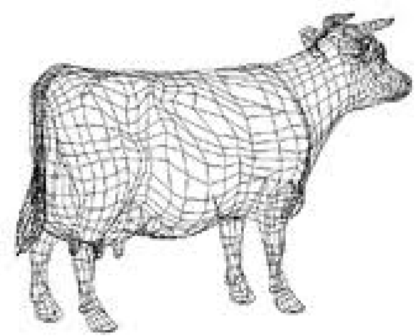


Estrutura de Dados Baseada em Arestas ou lados

Na estrutura de dados baseada em arestas além das listas de coordenadas de vértices e definição das faces, tem-se uma lista que identifica cada aresta e seus vértices limitantes.



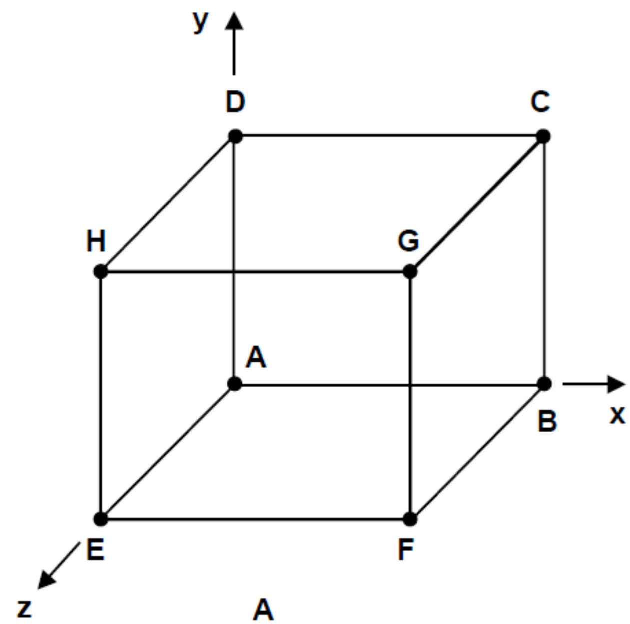




Aresta	Vértices
A1	EF
A2	FB
A3	BA
A4	AE
A5	EH
A6	FG
A7	BC
A8	AD
A9	HG
A10	GC
A11	CD
A12	DH

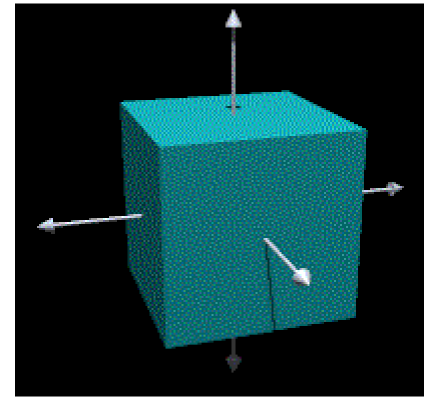
Vértices	Coordenadas
A	(0,0,0)
B	(1,0,0)
C	(1,1,0)
D	(0,1,0)
E	(0,0,1)
F	(1,0,1)
G	(1,1,1)
H	(0,1,1)

Faces	Arestas
F1	A1 A2 A3 A4
F2	A9 A6 A1 A5
F3	A6 A10 A7 A2
F4	A7 A11 A8 A3
F5	A12 A5 A4 A8
F6	A9 A12 A11 A10

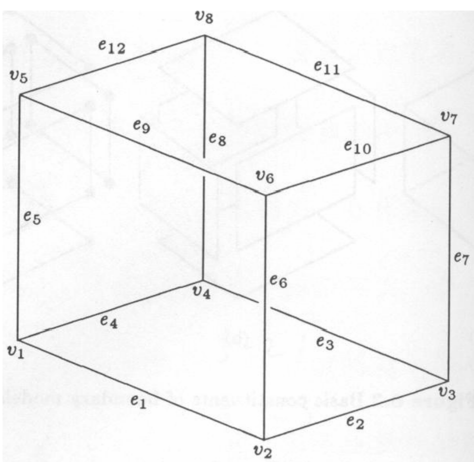


A

Baseada em lados (edges)



- Lados são considerados orientados.
- Cada lado pertence a duas faces.
- Faces são considerados orientadas, positivas se sua lista de lados apontar para fora se for no sentido horário



edge	*vertices*
e_1	$v_1\ v_2$
e_2	$v_2\ v_3$
e_3	$v_3\ v_4$
e_4	$v_4\ v_1$
e_5	$v_1\ v_5$
e_6	$v_2\ v_6$
e_7	$v_3\ v_7$
e_8	$v_4\ v_8$
e_9	$v_5\ v_6$
e_{10}	$v_6\ v_7$
e_{11}	$v_7\ v_8$
e_{12}	$v_8\ v_5$

vertex	*coordinates*
v_1	$x_1\ y_1\ z_1$
v_2	$x_2\ y_2\ z_2$
v_3	$x_3\ y_3\ z_3$
v_4	$x_4\ y_4\ z_4$
v_5	$x_5\ y_5\ z_5$
v_6	$x_6\ y_6\ z_6$
v_7	$x_7\ y_7\ z_7$
v_8	$x_8\ y_8\ z_8$

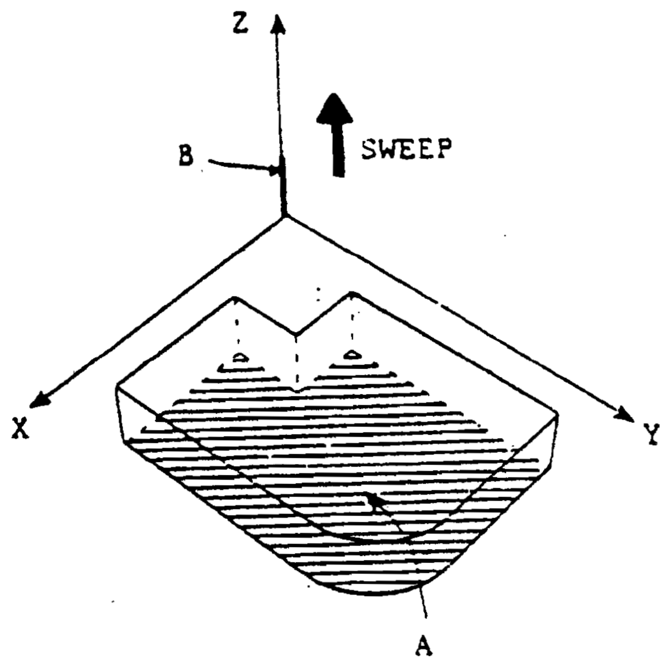
face	*edges*
f_1	$e_1\ e_2\ e_3\ e_4$
f_2	$e_9\ e_6\ e_1\ e_5$
f_3	$e_{10}\ e_7\ e_2\ e_6$
f_4	$e_{11}\ e_8\ e_3\ e_7$
f_5	$e_{12}\ e_5\ e_4\ e_8$
f_6	$e_{12}\ e_{11}\ e_{10}\ e_9$

use essas estruturas de dados para desenhar a superfície do seu trabalho 2

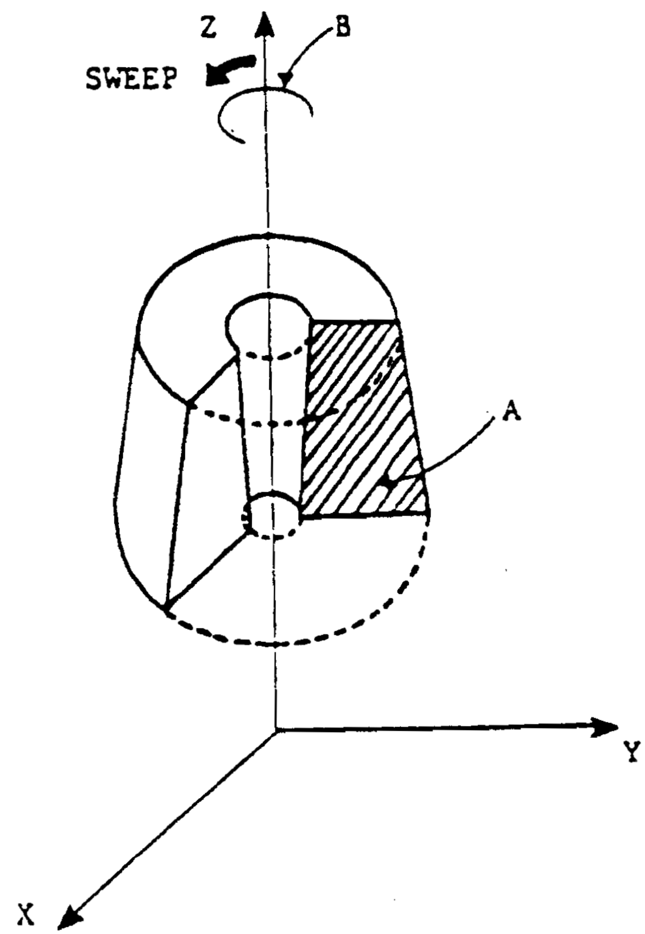
Só as coordenadas dos vértices são transformadas e projetadas para transformar os objetos.

Esses são redesenhados a partir do desenho das diversas arestas das diversas faces

Sweep representation



Translational sweeping.



Rotational sweeping.

Bibliografia:

M.A. Mortenson. Geometric modeling , Wiley, 1985

E. Azevedo, A. Conci, Computação Gráfica: teoria e prática, Campus ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley,A.van Dam,S.K.Feiner,J.F.Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, Reading, 1990.

M. Mäntylä, An introduction to solid modeling ,CS Press, 1988.