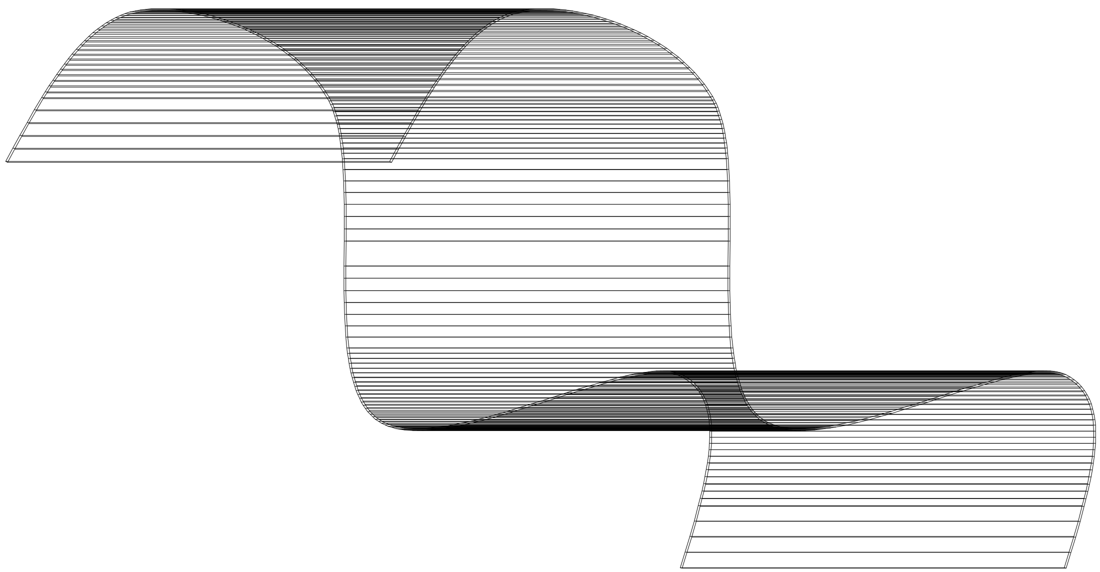


aula 11

Superfícies

2016/2 – IC / UFF

Superfícies

Por equações tri-dimensionais :

representações não paramétricas

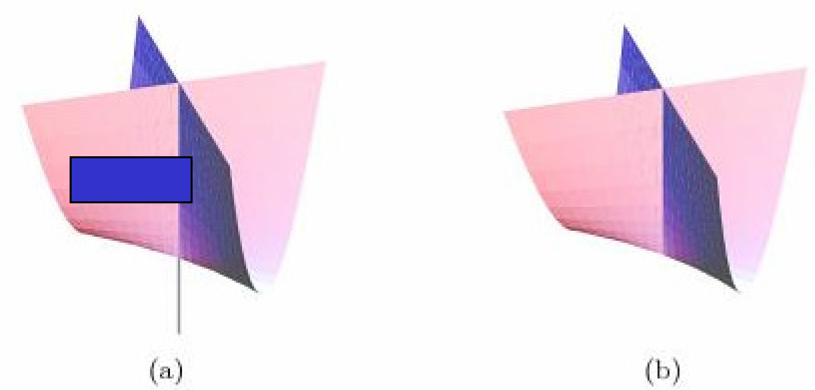


Fig. 1.4. (a) Whitney umbrella with-handle $x^2 - zy^2 = 0$; (b) Whitney umbrella without-handle $\{x^2 - zy^2 = 0\} - \{z < 0\}$.

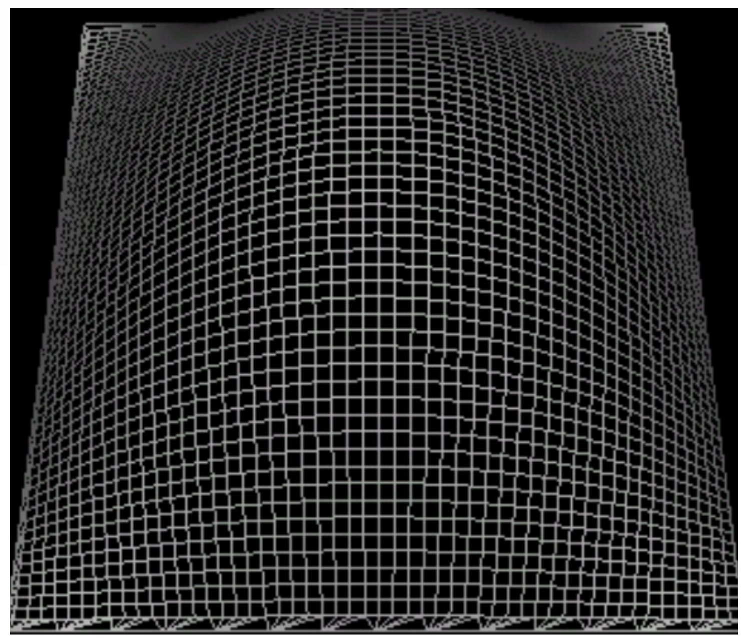
Por equações tri-dimensionais :

Superfícies Paramétricas

$x = f(u,v)$

$y = g(u,v)$

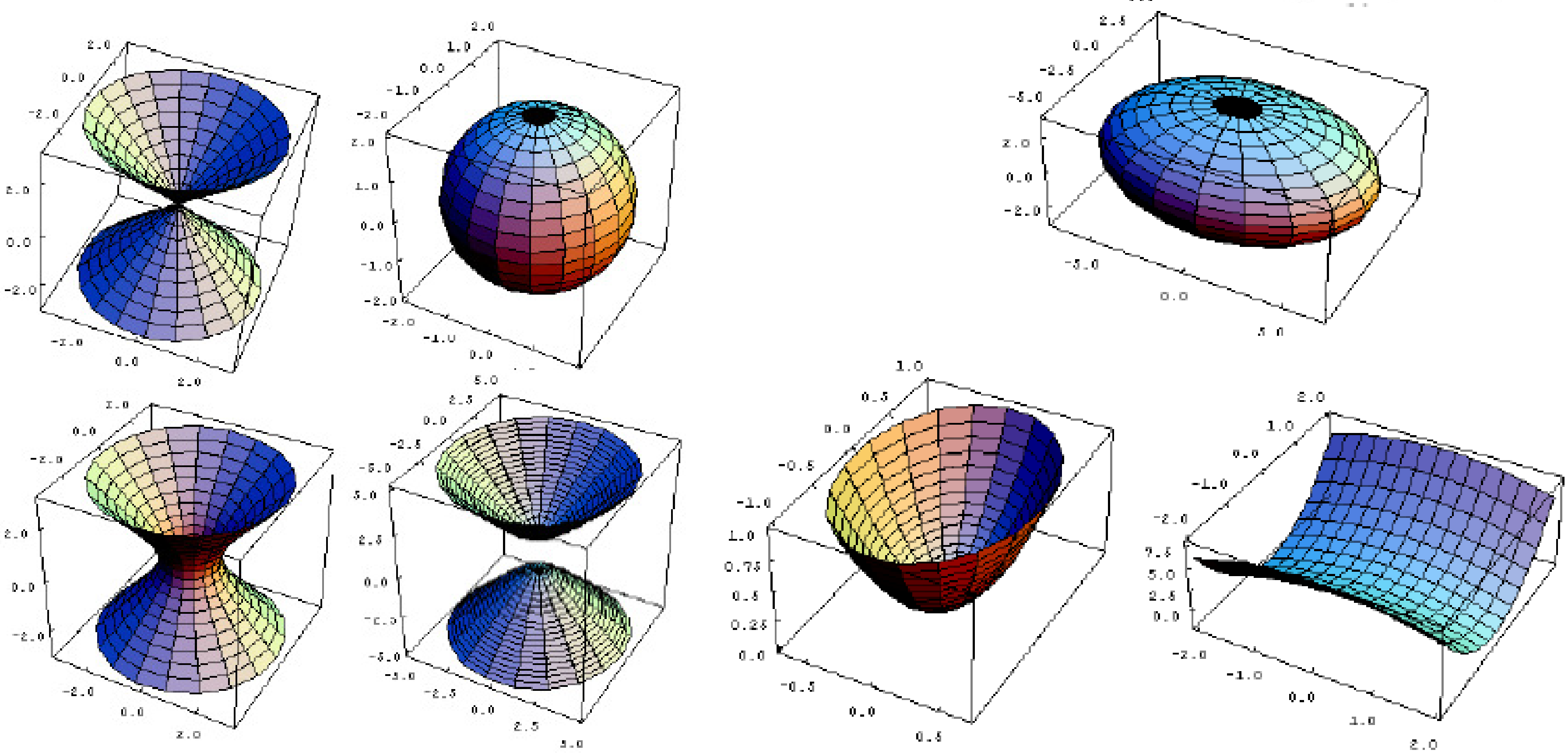
$z = h(u,v)$



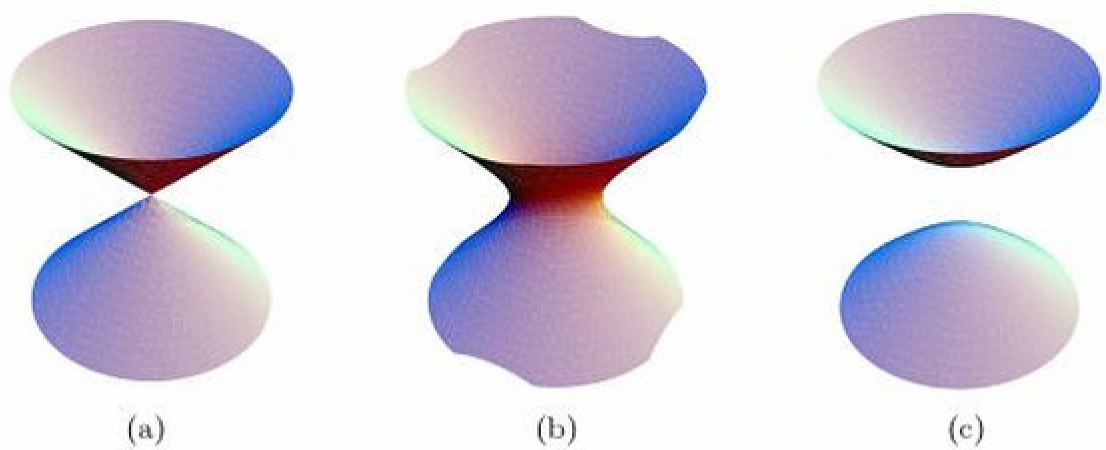
Por equações tri-dimensionais :

Quádricas

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Por equações tri-dimensionais :

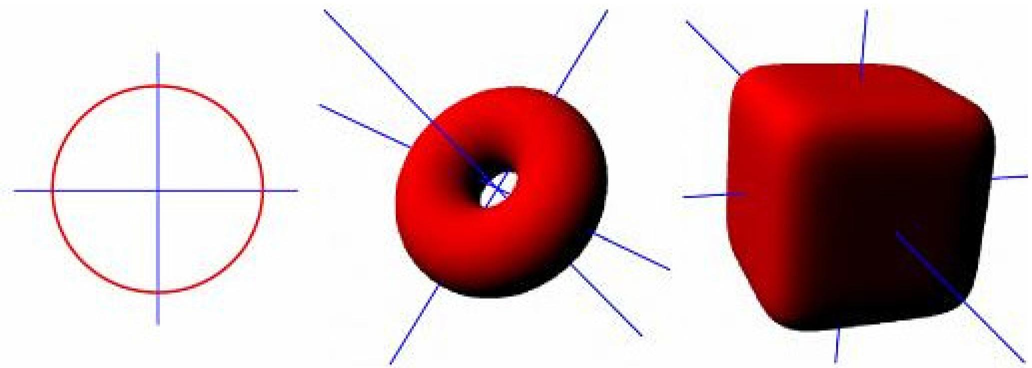


(a) Cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; (b) hyperboloid of one sheet $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$; (c) hyperboloid of two sheets $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

Representações não paramétricas, implicita exemplos

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ f(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$$

$$\begin{cases} x = \sin\ \theta \\ y = \cos\theta \end{cases} \qquad \text{where } \theta \in [0, 2\pi]$$



(a) (b) (c)

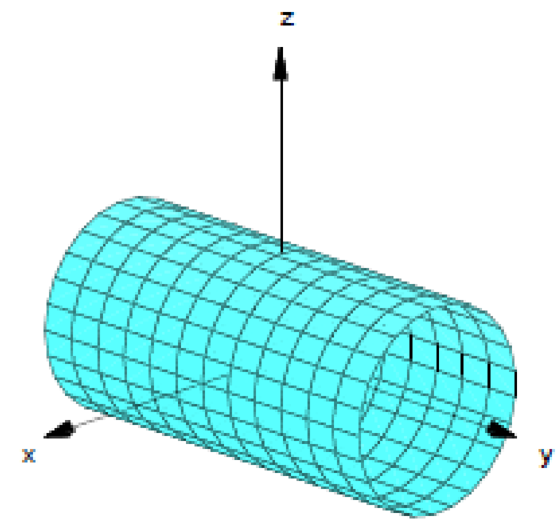
(a) A unit circle; (b) a torus; (c) a blended cube.

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u\ (R + r\cos v) \\ \sin u\ (R + r\cos v) \\ r\sin v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \qquad \text{where } t \in [0,1]$$

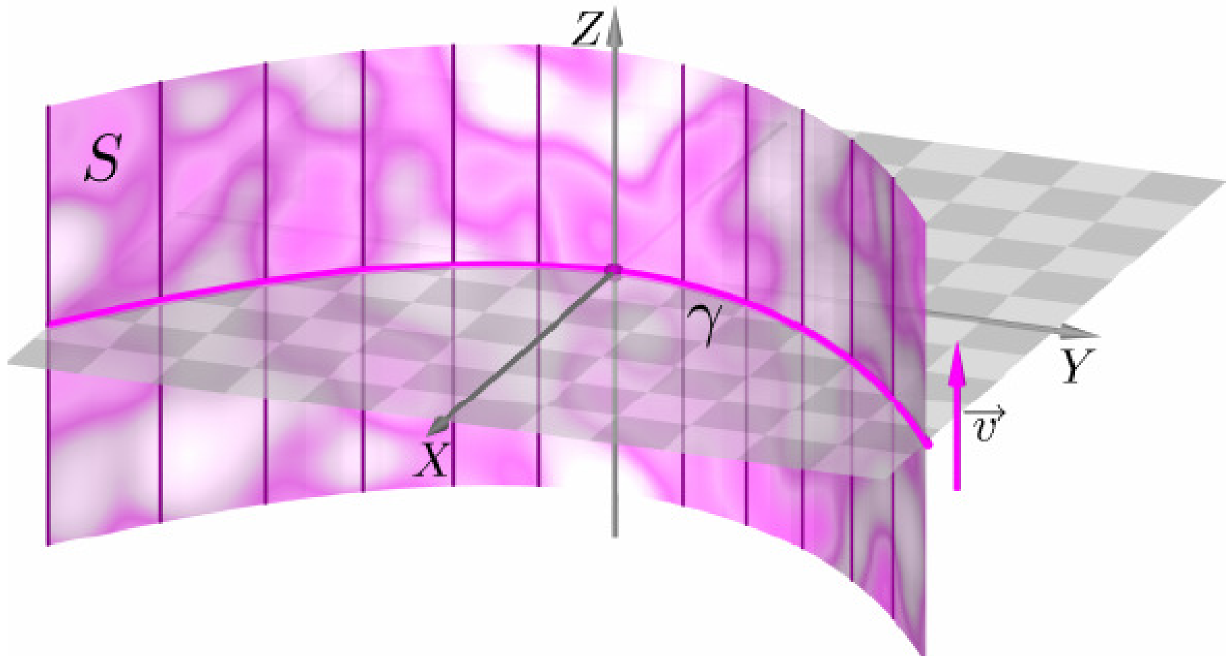
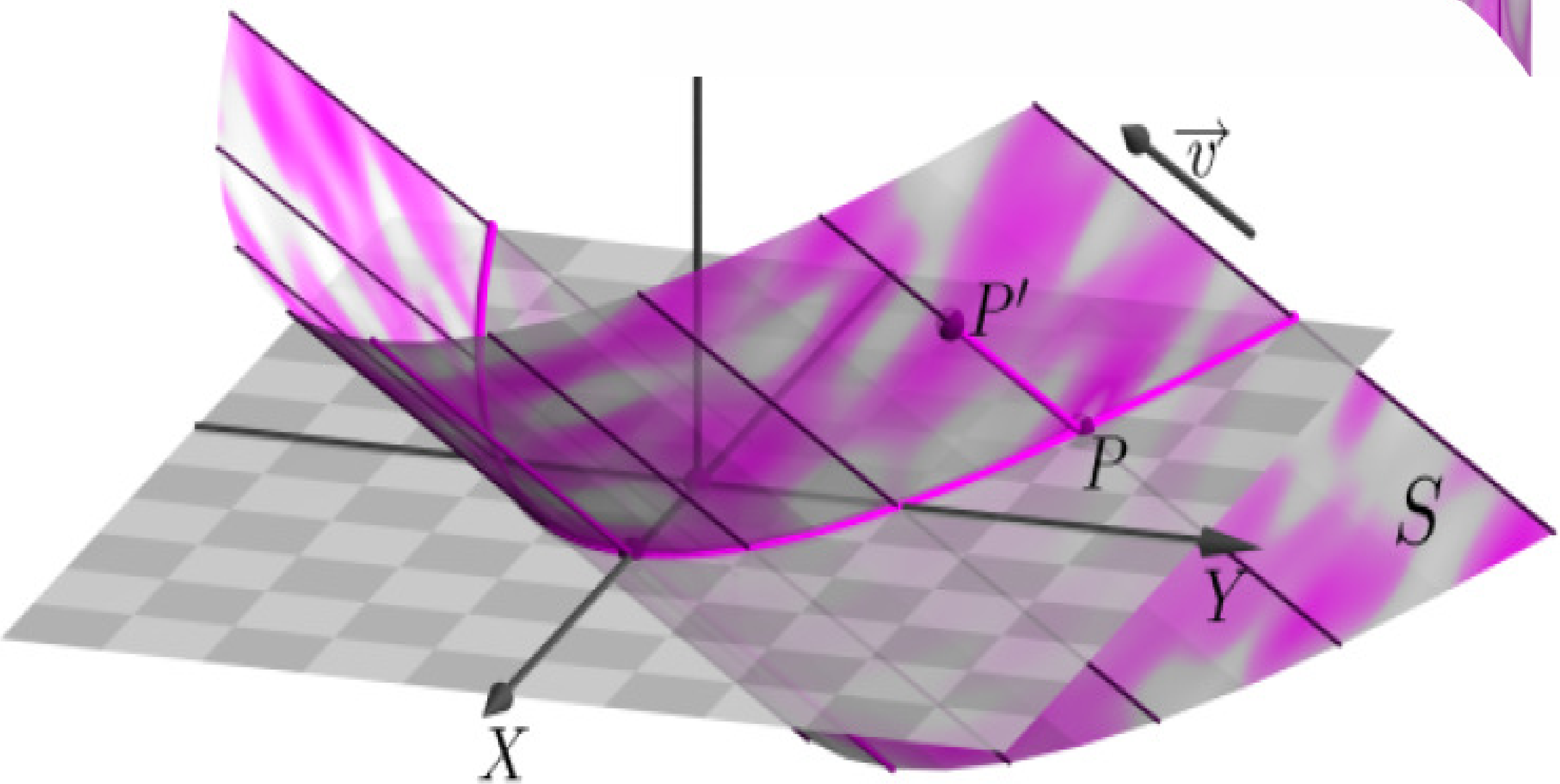
Representações paramétricas

Formas de geração:



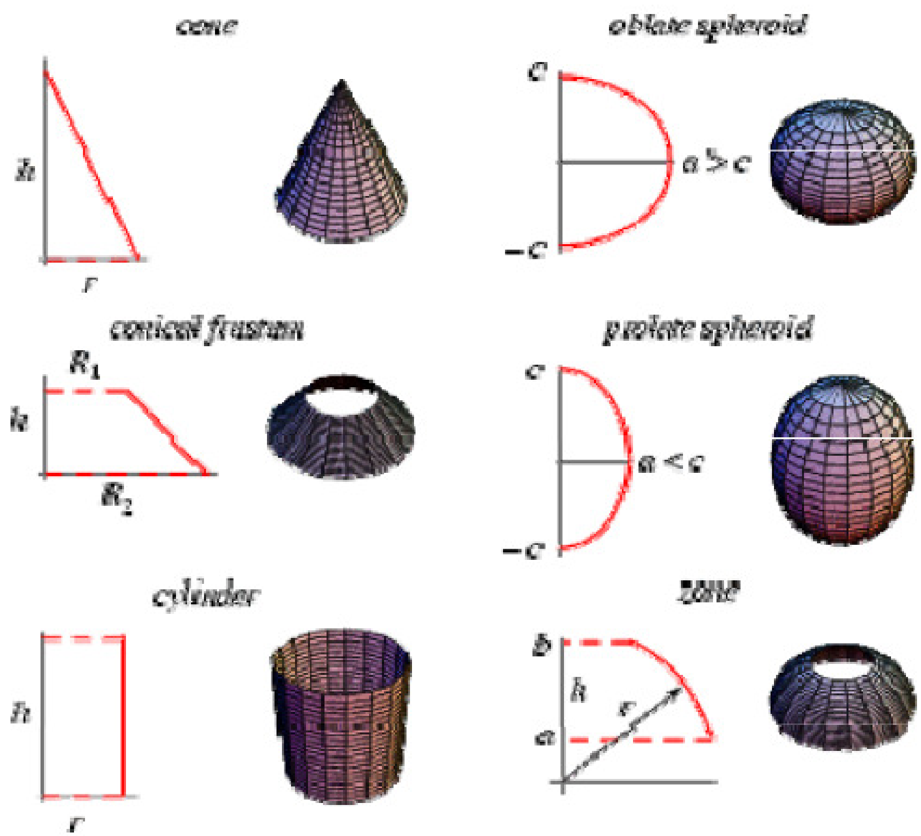
Superfície por caminho

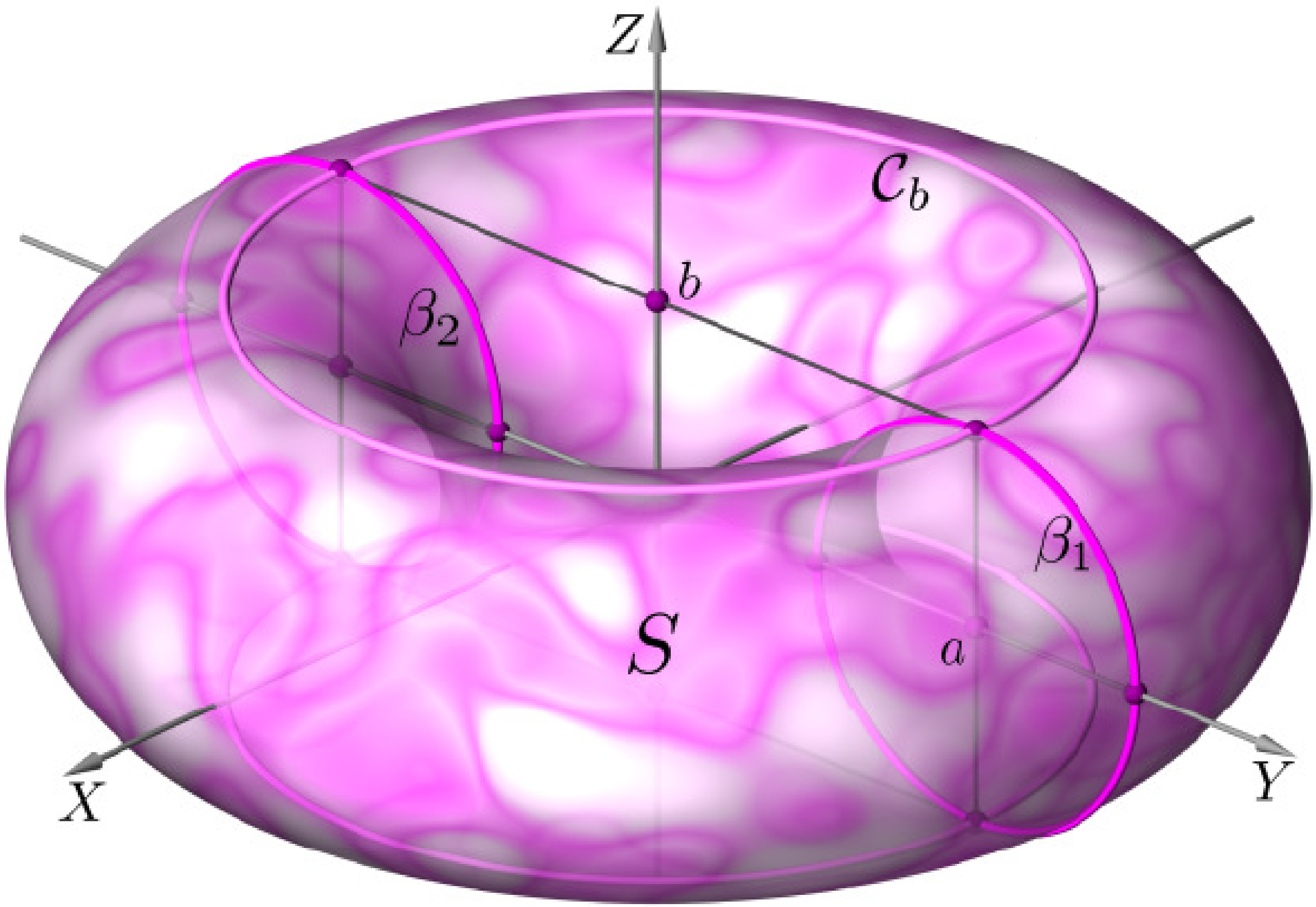
- Superfície criada atravessando uma curva ao longo de um caminho no espaço


Z
S
γ
Y
X
$\vec{v}$

$\vec{v}$
P'
P
S
Y
X

Revolução

- Superfície criada pela rotação de uma curva sobre um plano em torno de uma linha reta (o eixo de rotação) que está sobre o mesmo plano.

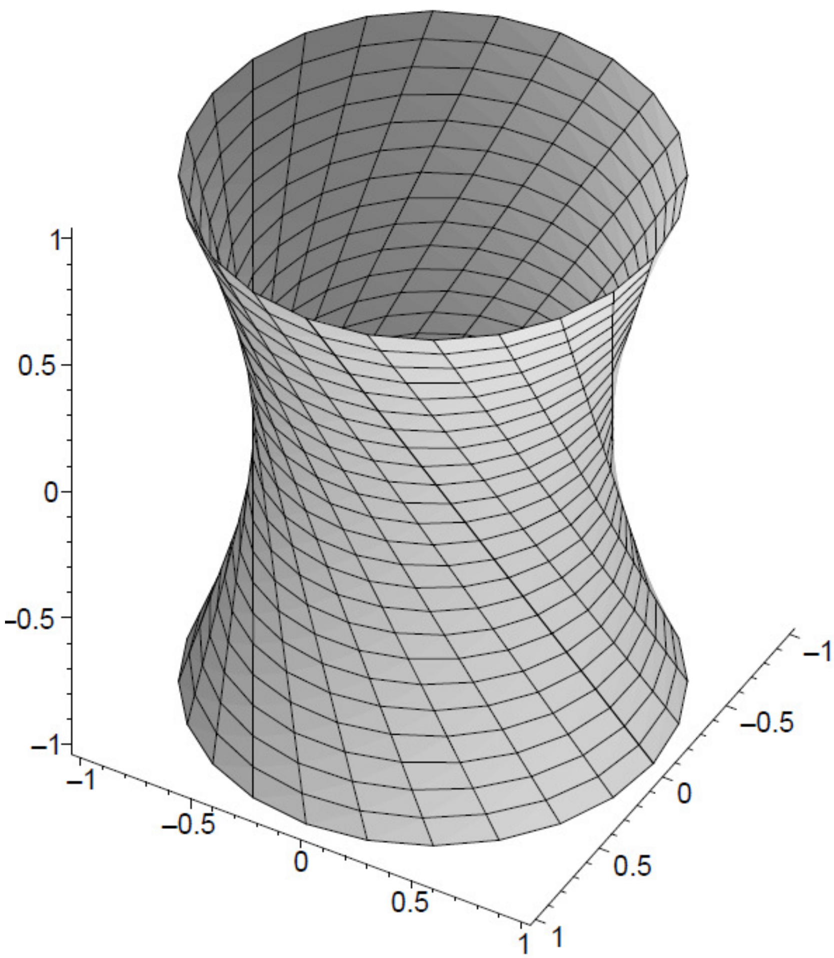


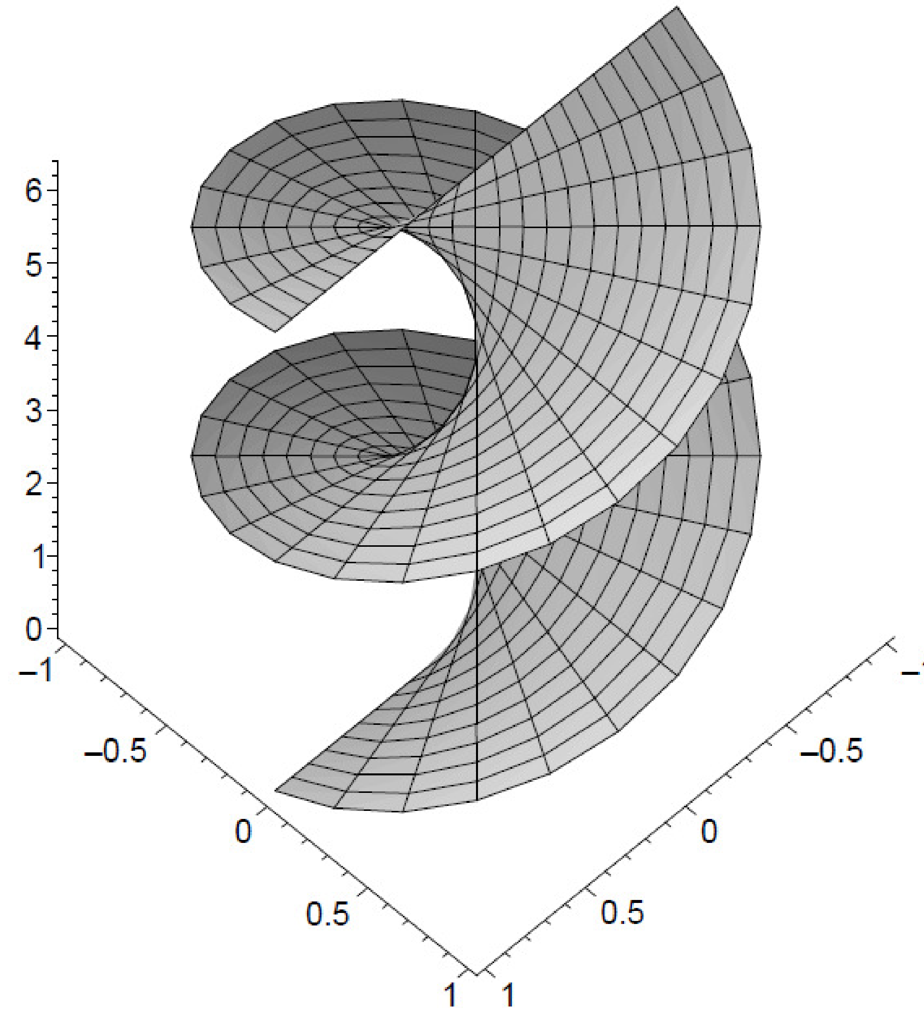


Z
$\mathcal{C}_b$
b
β_2
β_1
S
a
X
Y

Superfícies Regradas

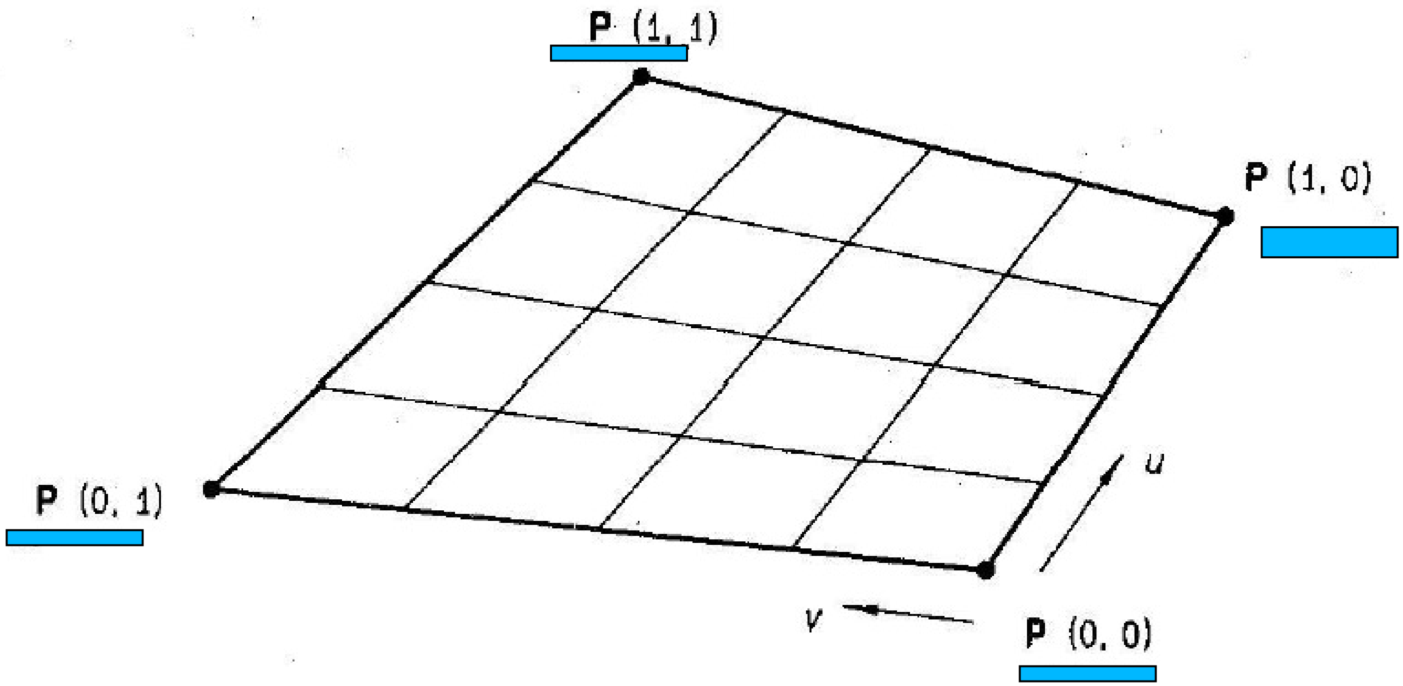
Superfícies regradas são reuniões de retas.





Geradas por interpolação

- Interpolação linear entre quatro pontos que não estão no mesmo plano



Definir pontos na superfície em termos de dois parâmetros (u, v)

Caso mais simples: interpolação bilinear

$$x(u,0) = (1-u)P_{0,0} + uP_{1,0}$$

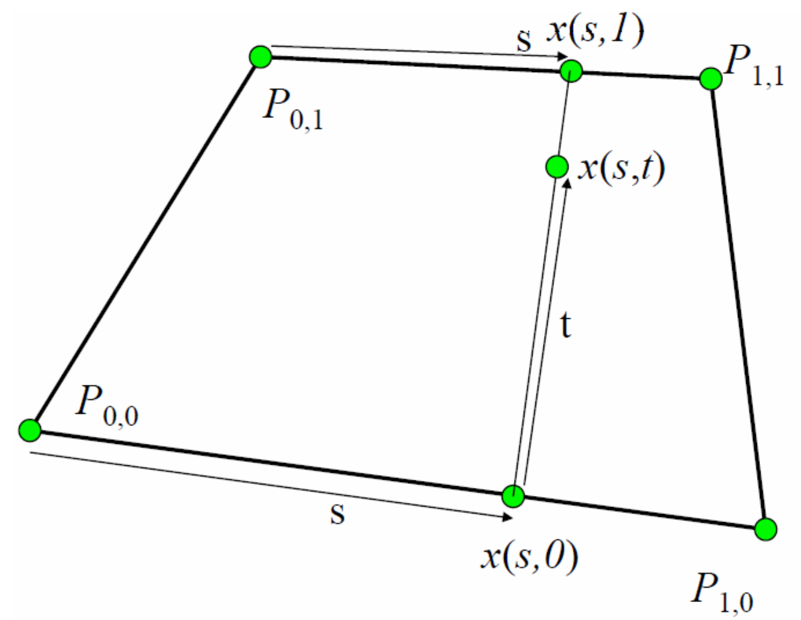
$$x(u,1) = (1-u)P_{0,1} + uP_{1,1}$$

$$x(u,v) = (1-v)x(u,0) + vx(u,1)$$

$$x(u,v) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{i,j}F_{i,u}(u)F_{j,v}(v)$$

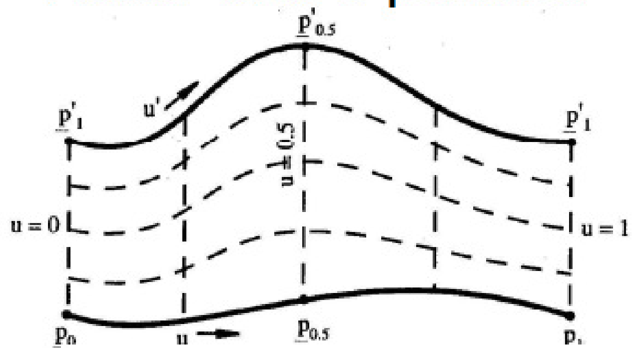
$$F_{0,u} = 1-u, \quad F_{1,u} = u$$

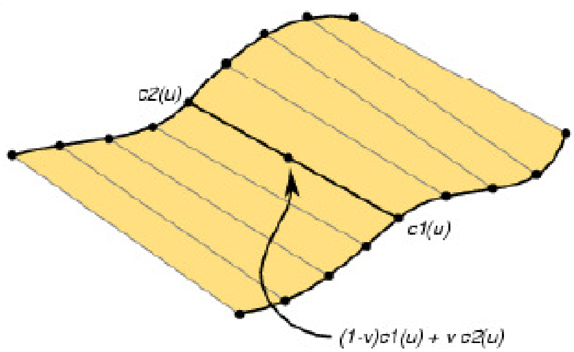
$$F_{0,v} = 1-v, \quad F_{1,v} = v$$



Lofting – interpolando as curvas

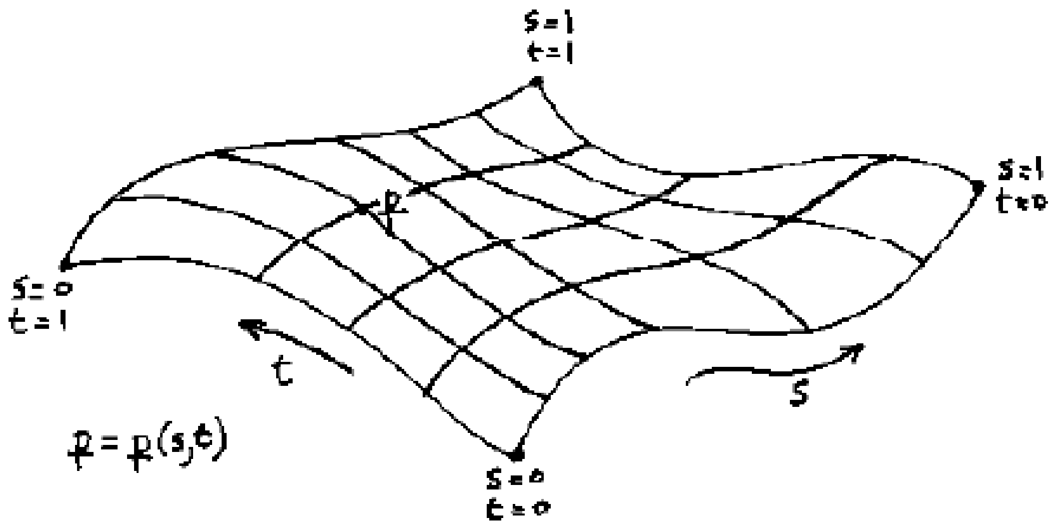
- Contruída juntando 2 curvas por linhas retas entre pontos





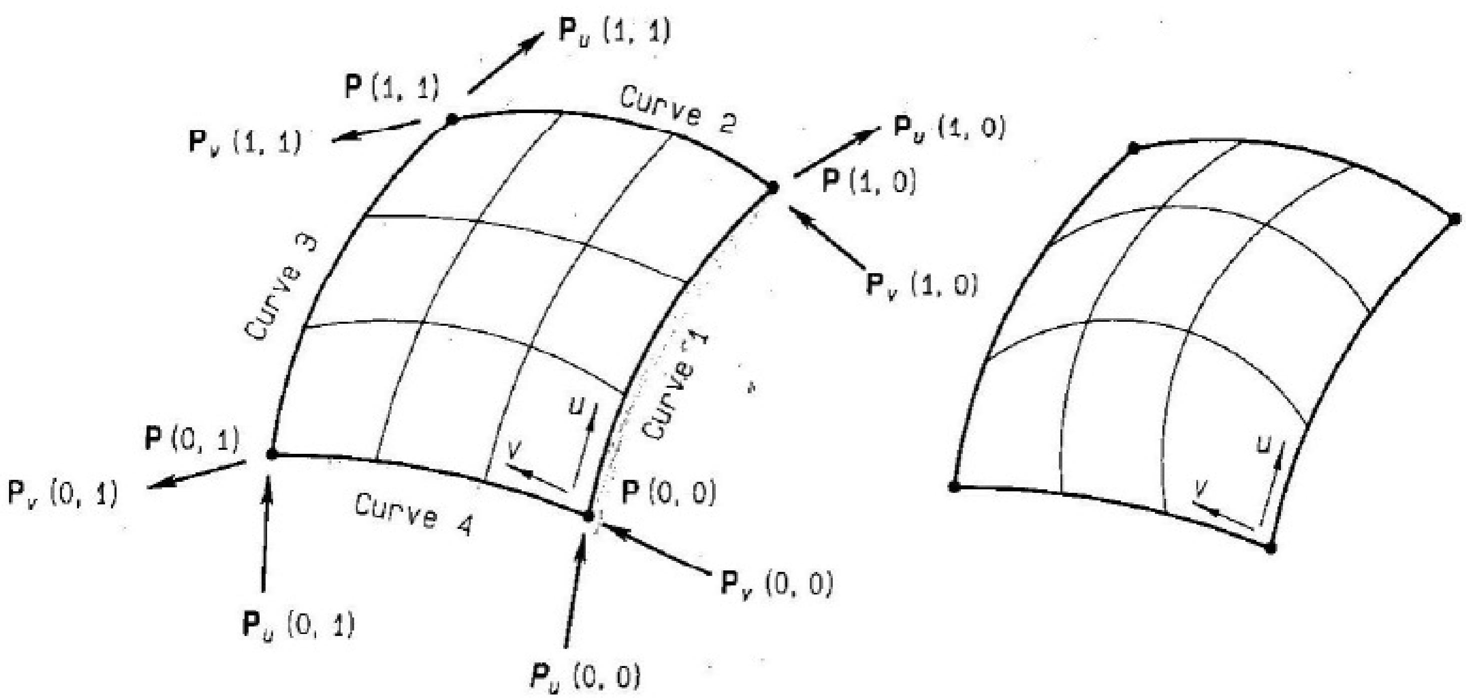
Superfície Linear de Coons

- Interpolação entre quatro curvas de fronteira



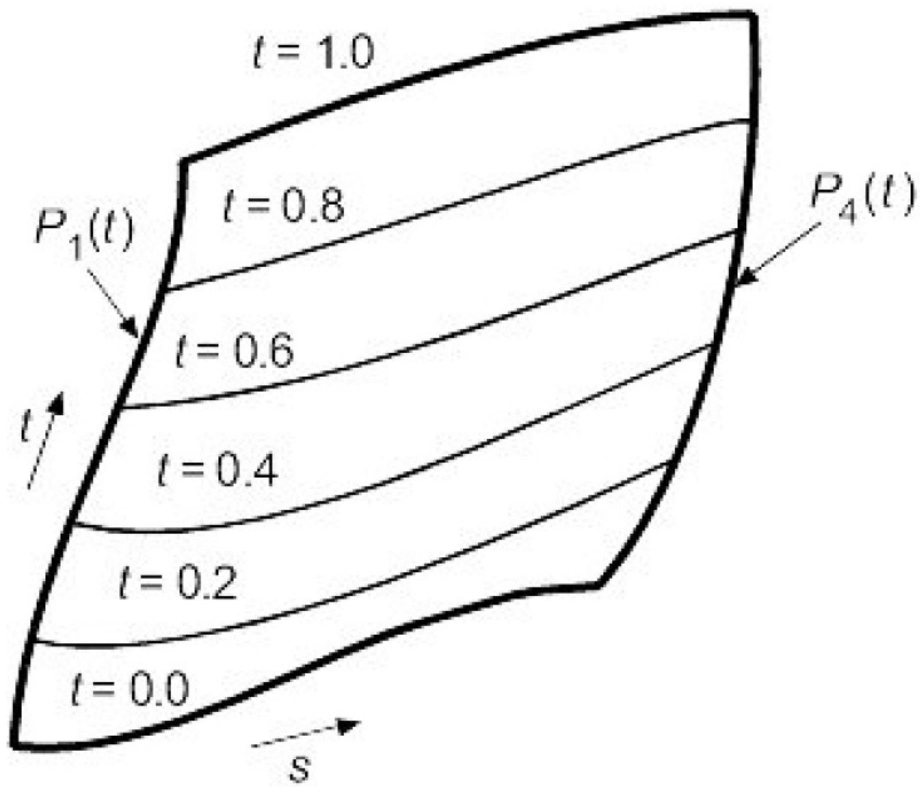
Patches

- Curvas cúbicas paramétricas como quatro curvas de fronteira



Remendos cúbicos

Superfície de Hermite

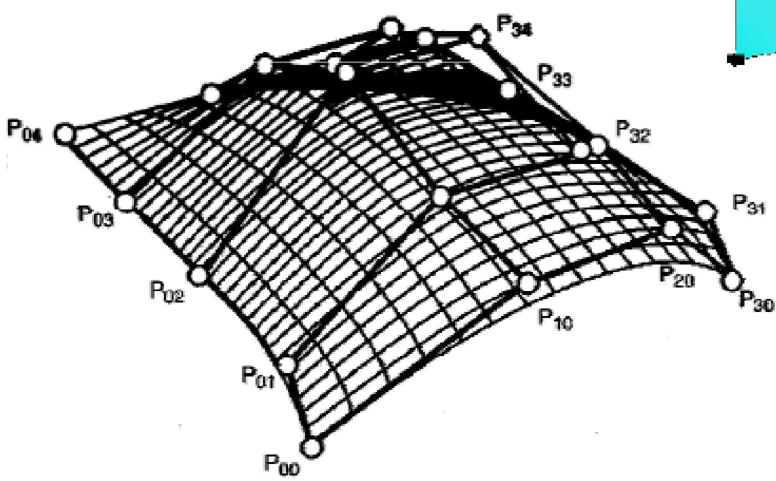


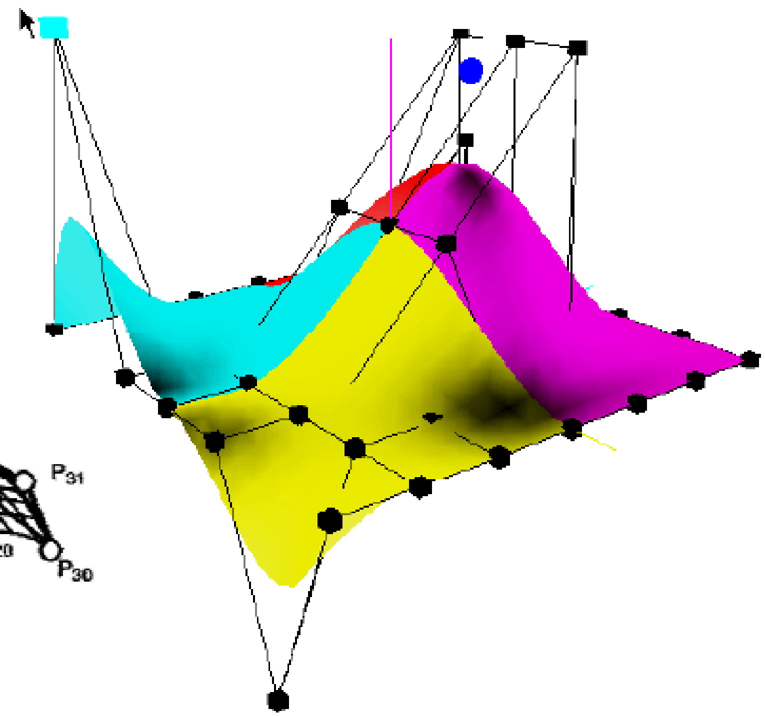
Duas curvas de Bézier podem ser utilizadas para formar uma superfície de Bézier.

$$\mathbf{x}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

Superfície de Bezier

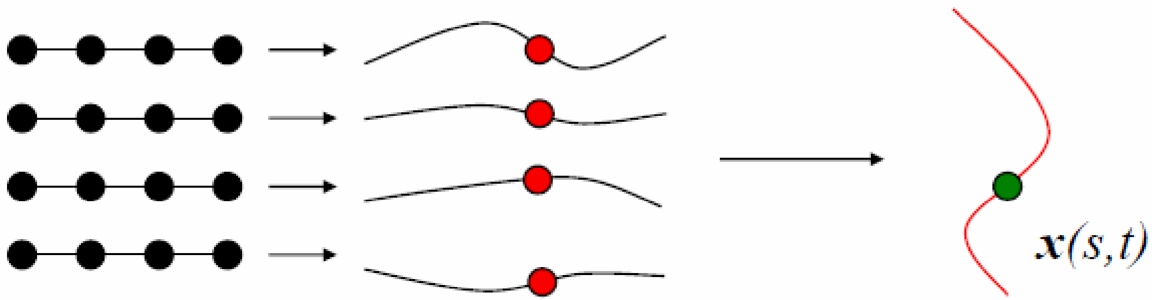
- Curvas Bezier como quatro curvas de fronteira





Retalhos de Bézier

- Curvas na fronteira são curvas de Bézier
- *Qualquer* curva para *s* ou *t* constante é uma curva Bézier
- Podemos pensar assim:
  - Cada linha da grade com 4 pontos de controle define uma curva de Bézier para o parâmetro *s*
  - Ao avaliar cada curva para um mesmo *s* obtemos 4 pontos de controle "virtuais"
  - Pontos de controle "virtuais" definem uma curva Bézier em *t*
  - Avaliando esta curva em um dado *t* resulta no ponto $\boldsymbol{x}(s,t)$



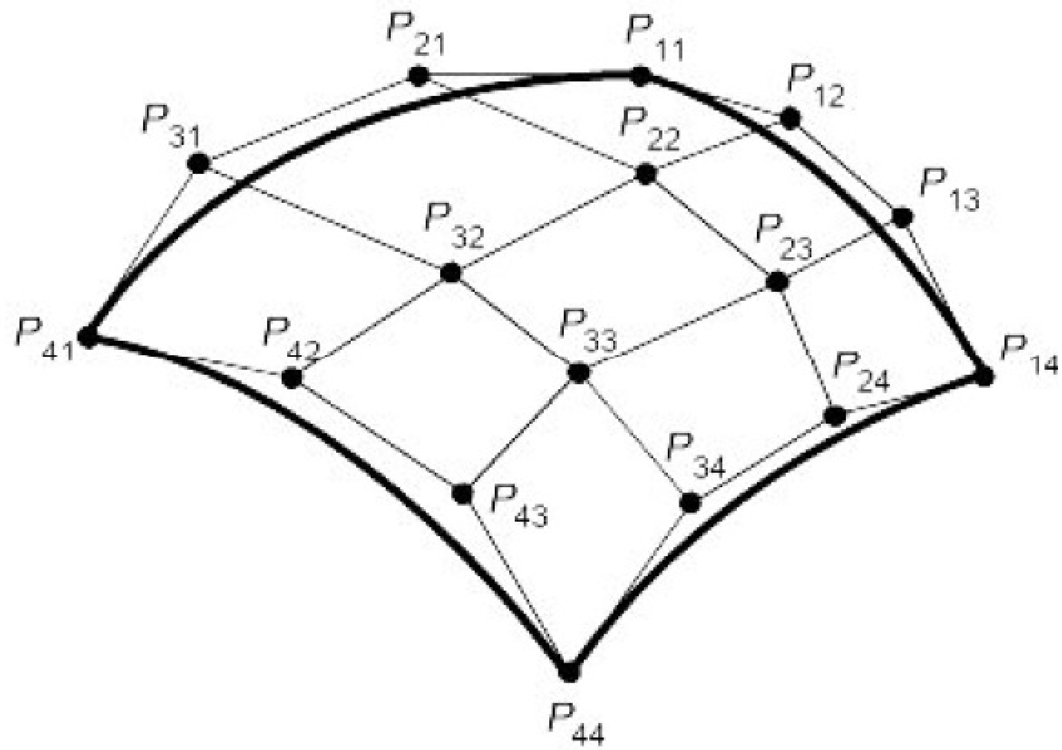
Superfície de Bézier

As equações para a superfície de Bézier podem ser obtidas da mesma forma que as de Hermite, resultando:

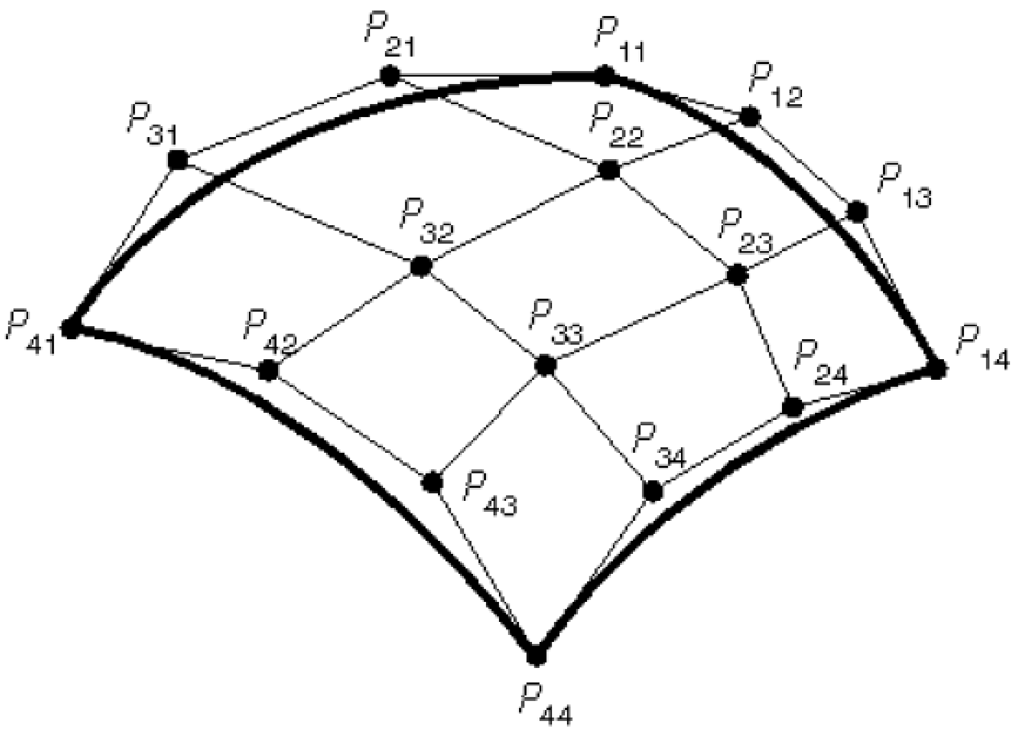
$$x(s,t) = S.M_B.G_{Bx}.M_B^T.T^T$$

$$y(s,t) = S.M_B.G_{By}.M_B^T.T^T$$

$$z(s,t) = S.M_B.G_{Bz}.M_B^T.T^T$$



A matriz geométrica tem 16 pontos de control



- Superfície de Bézier é dada por

$$x(s,t) = S \cdot M \cdot G_x^T \cdot M^T \cdot T^T,$$

$$y(s,t) = S \cdot M \cdot G_y^T \cdot M^T \cdot T^T,$$

$$z(s,t) = S \cdot M \cdot G_z^T \cdot M^T \cdot T^T,$$

$$0 \leq s, t \leq 1$$

e é definida por 16 pontos de controle (matriz $\boldsymbol{G}$)

Superfície de Bézier

Continuidade C^0 e G^0 é obtida fazendo coincidir os quatro pontos de controlo de fronteira: P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{44}

Para obter G^1 devem ser colineares:

P_{13}, P_{14} e P_{15}

P_{23}, P_{24} e P_{25}

P_{33}, P_{34} e P_{35}

P_{43}, P_{44} e P_{45}

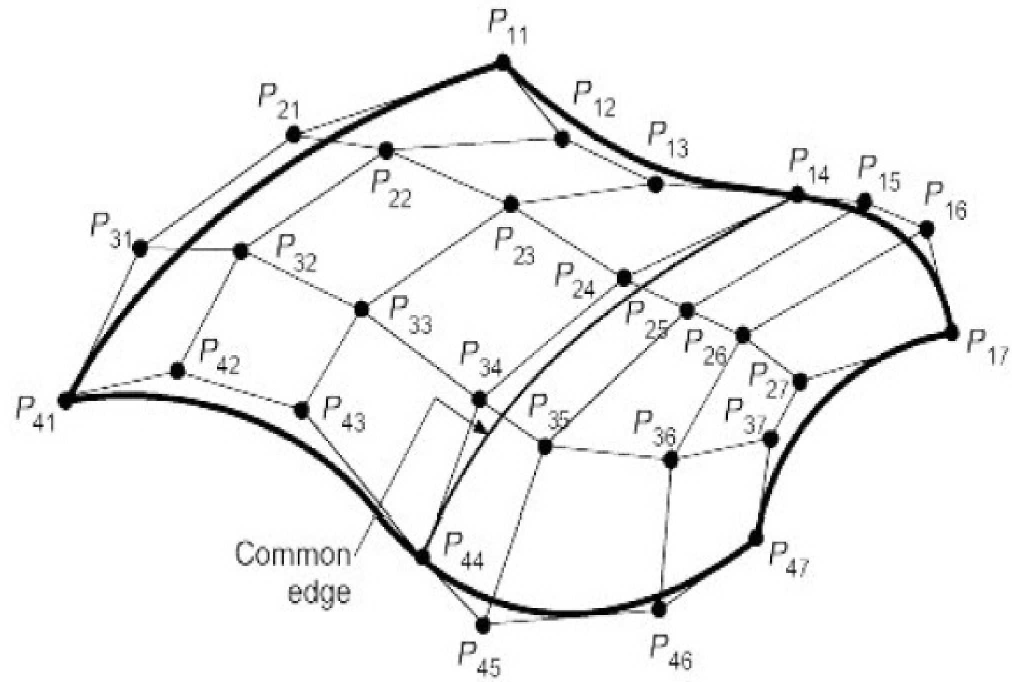
e

$(P_{14}-P_{13}) / (P_{15} - P_{14}) = K$

$(P_{24}-P_{23}) / (P_{25} – P_{24}) = K$

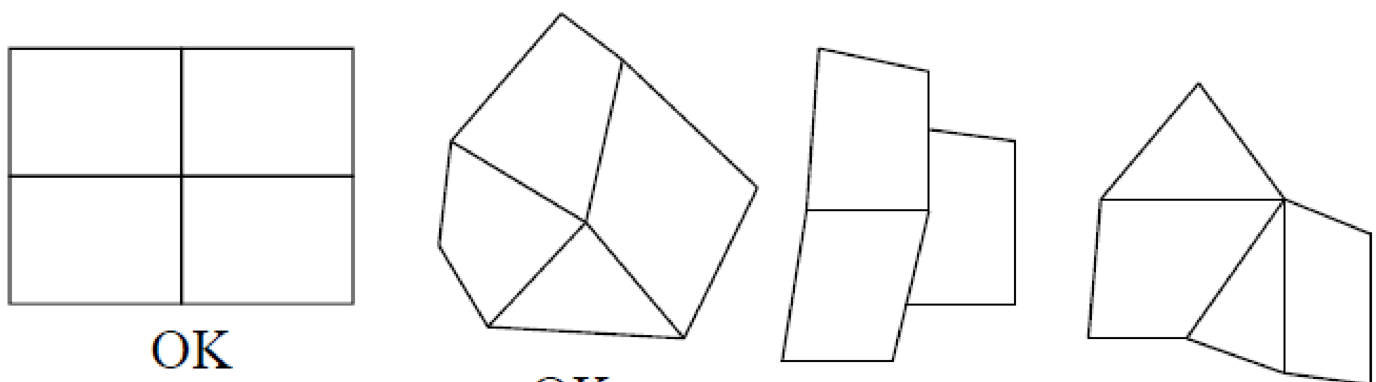
$(P_{34}-P_{33}) / (P_{35} – P_{34}) = K$

$(P_{44}-P_{43}) / (P_{45} – P_{44}) = K$



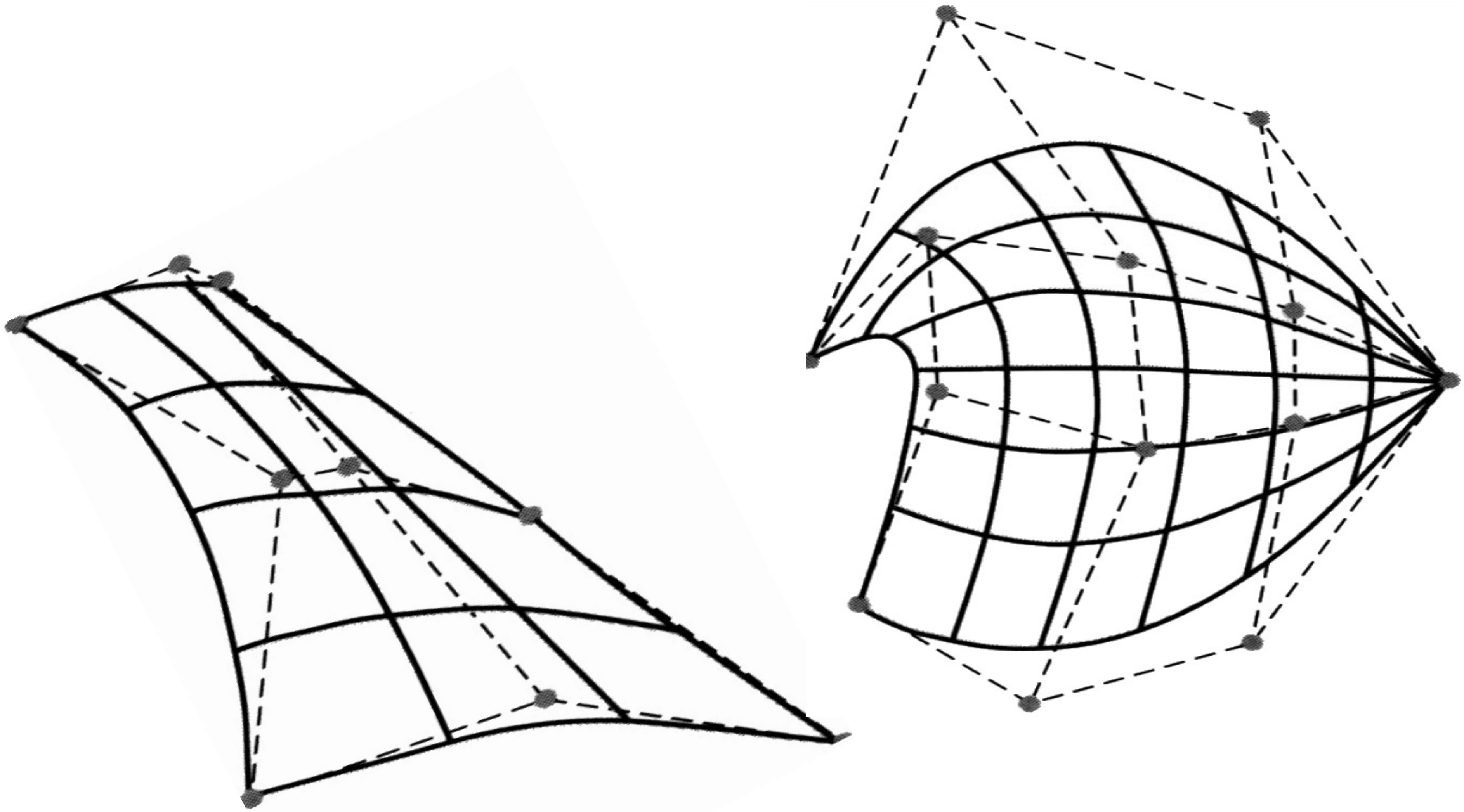
Malhas de Retalhos Bézier

- São malhas compostas de diversos retalhos unidos ao longo de suas fronteiras
  - As arestas das grades de controle precisam se justapor perfeitamente
  - As grades precisam ser retangulares



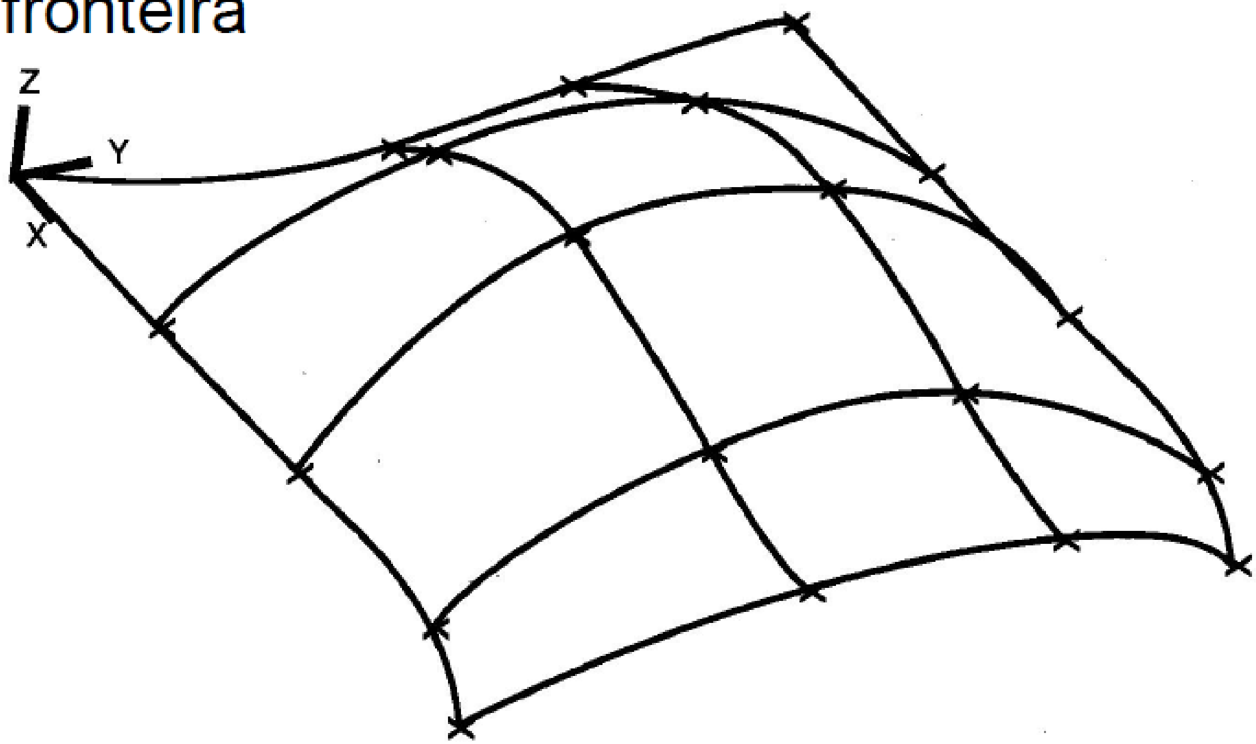
OK OK Não Não

A seguir dois exemplos de superfícies geradas com $m = 3$, $n = 3$ e $m = 4$, $n = 4$ pontos de controle.



Superfície B-Splines

- Curvas B-Spline como quatro curvas de fronteira

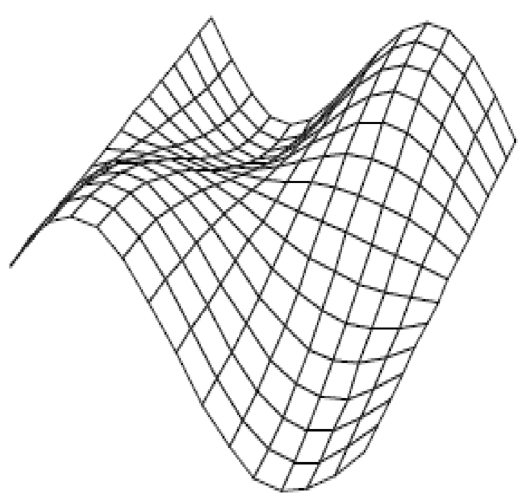


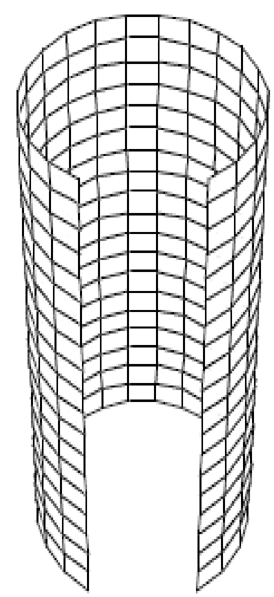
T-spline surface

- Superficie que pode ser considerada como uma NURBS na qual uma seqüência de pontos de controle determina a superfície, que lembra a letra "T".
- Esse tipo de superfície facilita a fusão de pedaços .

Ideia de *multiplicação* de 2 curvas

A informação geométrica que define uma curva passa a ser ela própria uma função de uma variável paramétrica



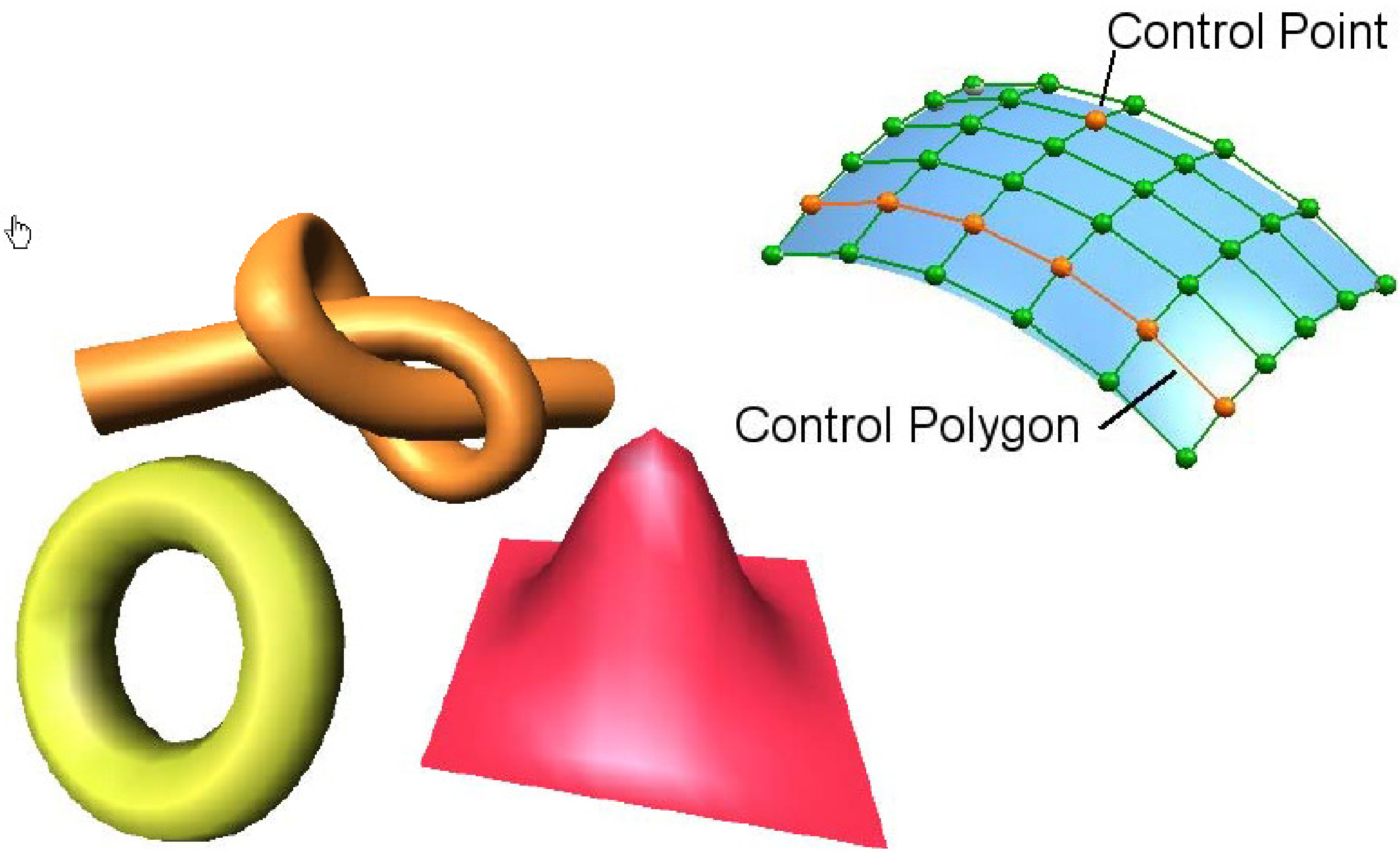


Superfícies Paramétricas

A forma geral de uma superfície 3D na sua representação paramétrica é:

$$f(u,v) = (f_x(u,v), f_y(u,v), f_z(u,v))$$

Nurbs

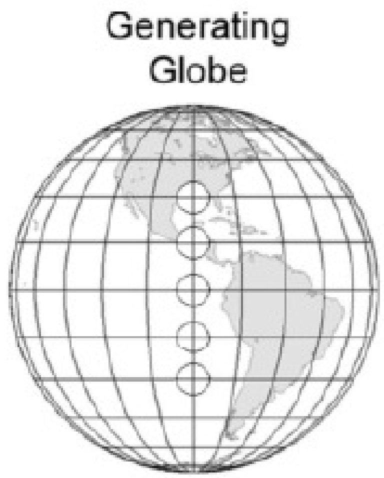


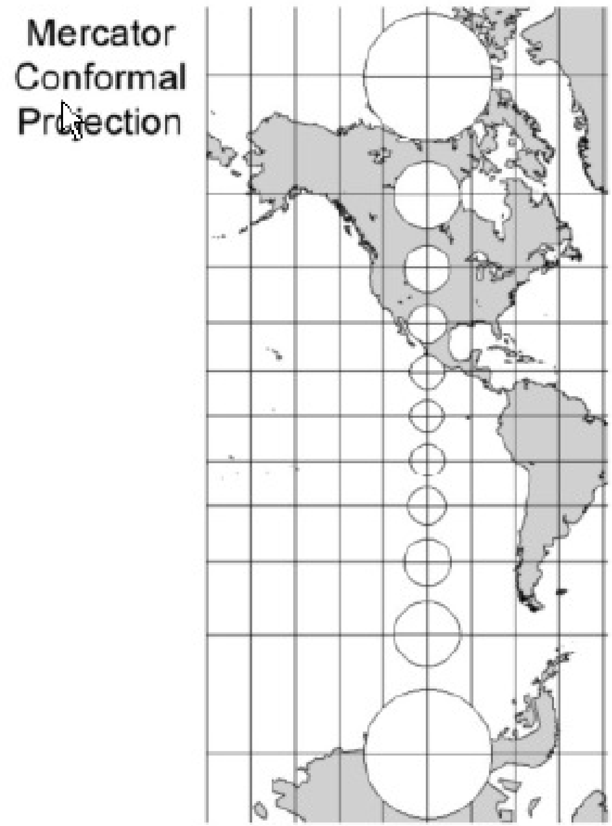
Malha de polígono (mesh)

- Coleção de vértices e polígonos que definem a forma de um objeto poliédrico
- Malhas de triângulos ou quadriláteros
  - triangulação

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} b_i(u) b_j(v) p_{ij}$$

Mapeamentos





Curvas de Nível

Existe uma outra técnica útil, para descrever o comportamento de uma função de duas variáveis.

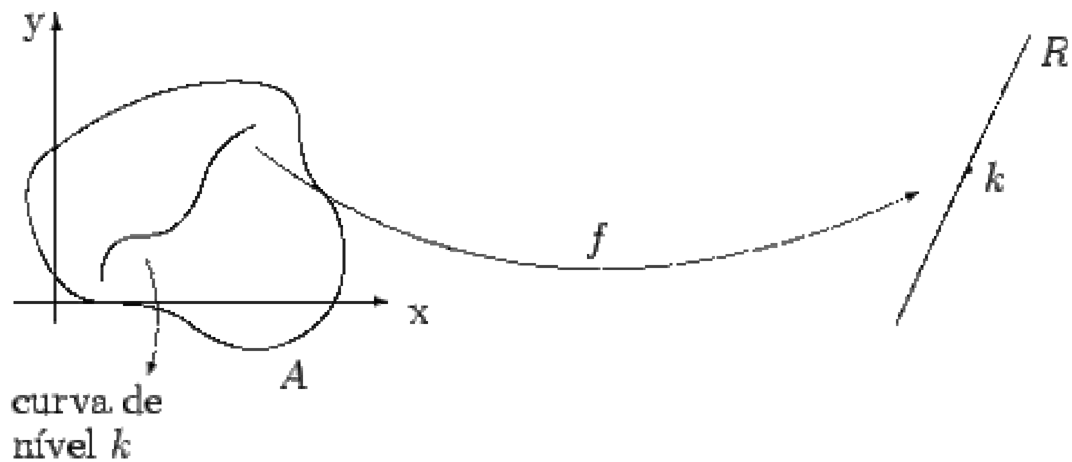
O método consiste em descobrir no plano ***xy*** os gráficos das equações ***f(x, y) = k*** para diferentes valores de ***k***.

Os gráficos obtidos desta maneira são chamados as **curvas de nível** da função ***f***.

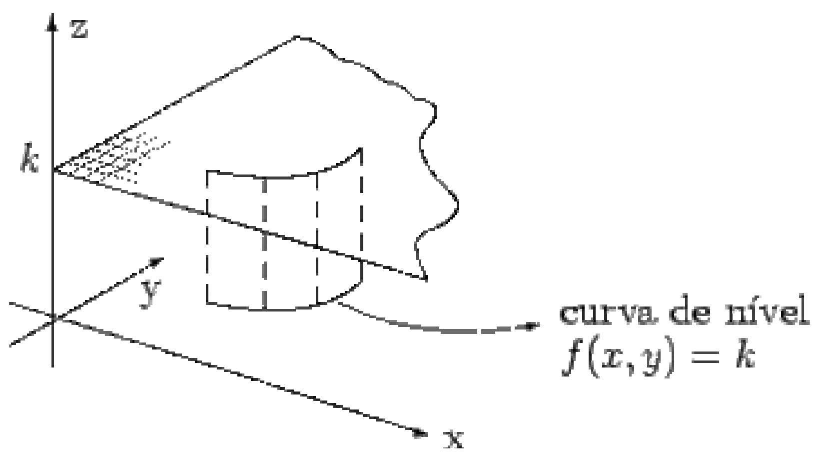
$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Curvas de Nível

Curva de nível $k : \{(x, y) \in A$ tal que $f(x, y) = k\}$.



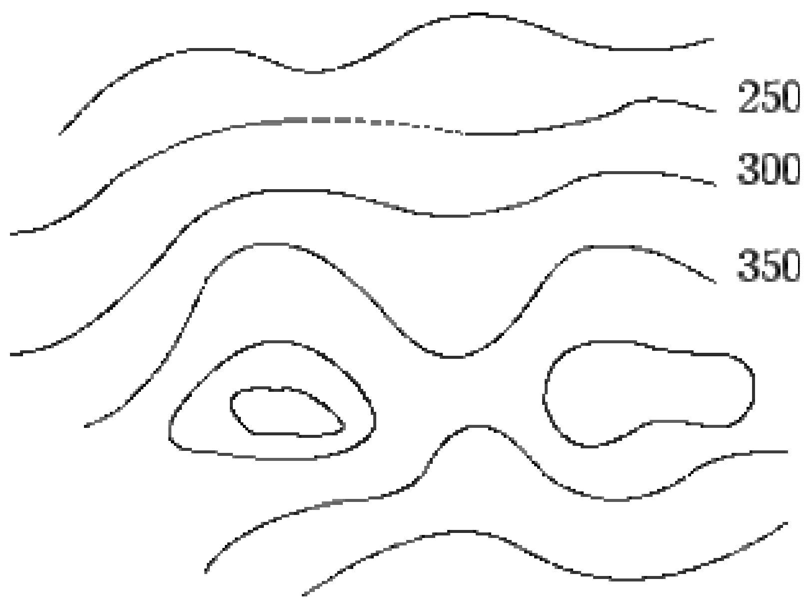
ou



Exemplo

f(x,y) = z = altura em relação ao nível do mar.

Essas curvas de nível correspondem às **linhas de contorno** topográfico.

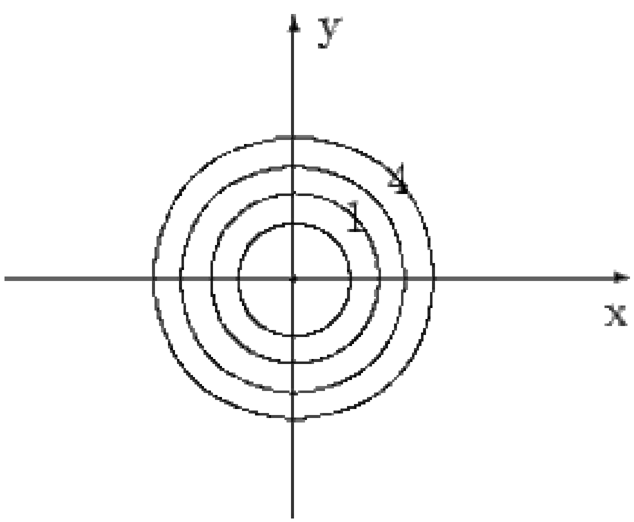


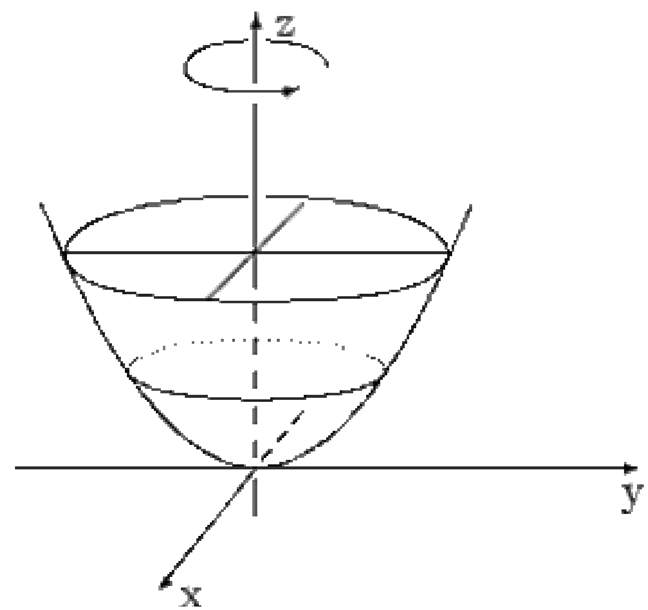
Exemplo

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x, y) = x^2 + y^2$

As curvas de nível são os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$.

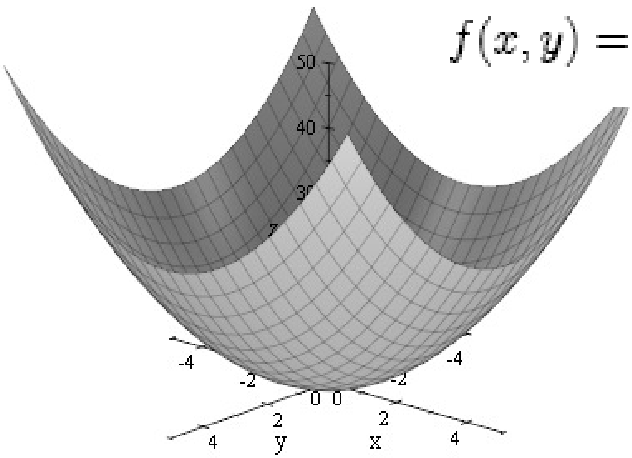




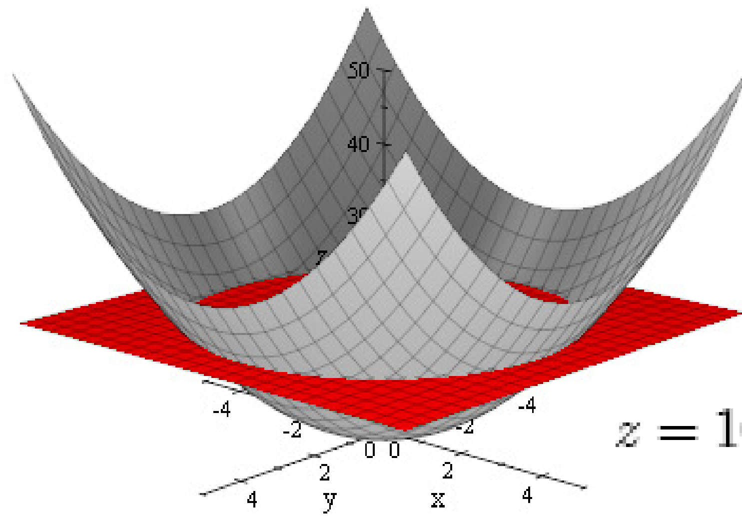
Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

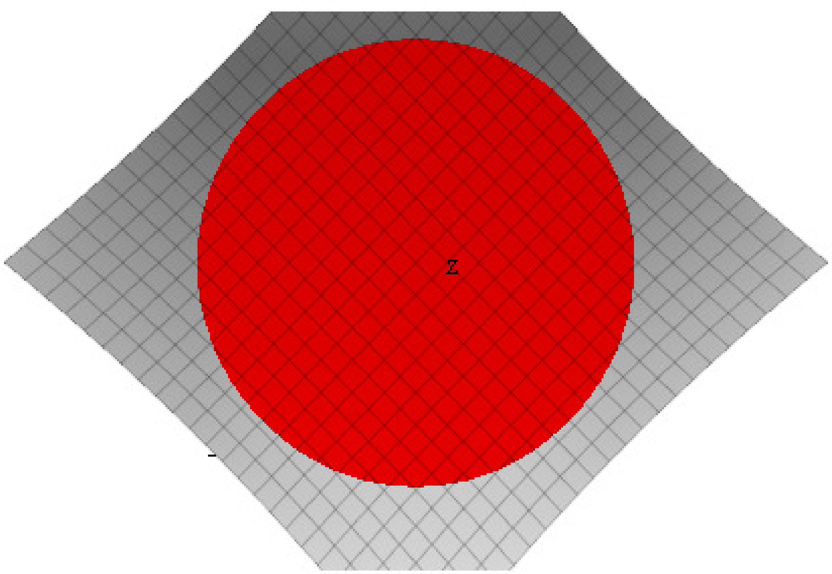
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 + y^2$$



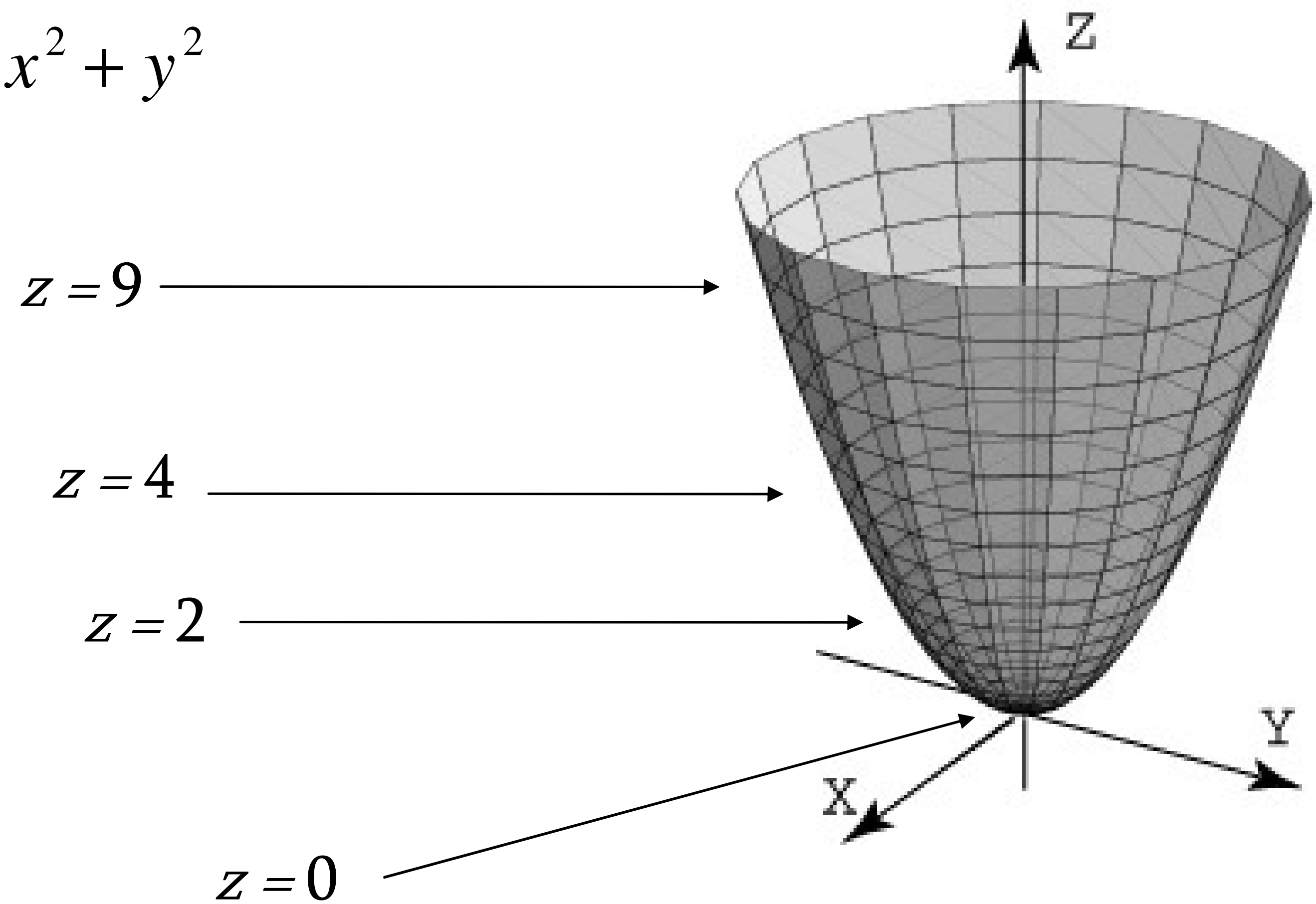
$$z = 16$$



Exemplos:

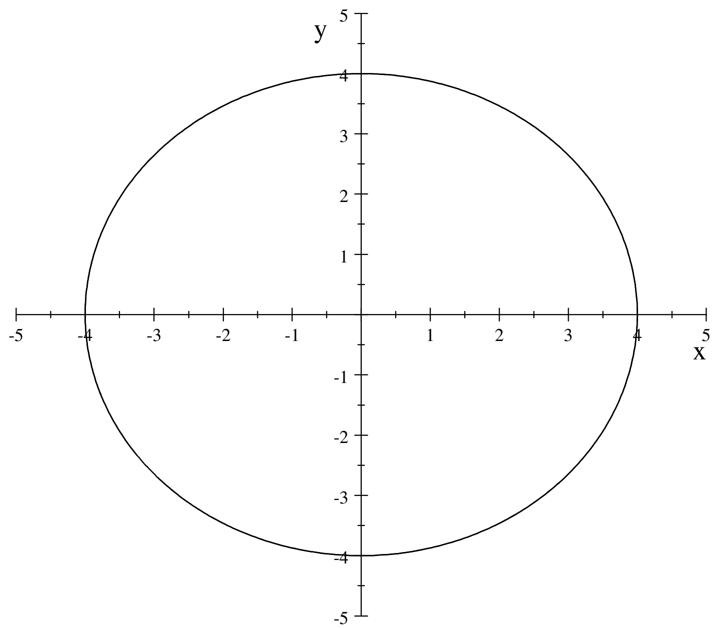
Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível

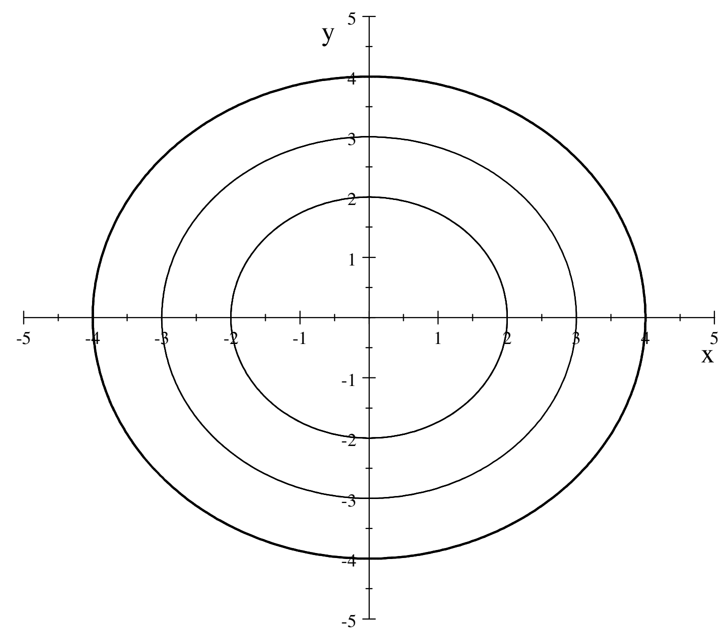
$$z = x^2 + y^2$$



Exemplos:

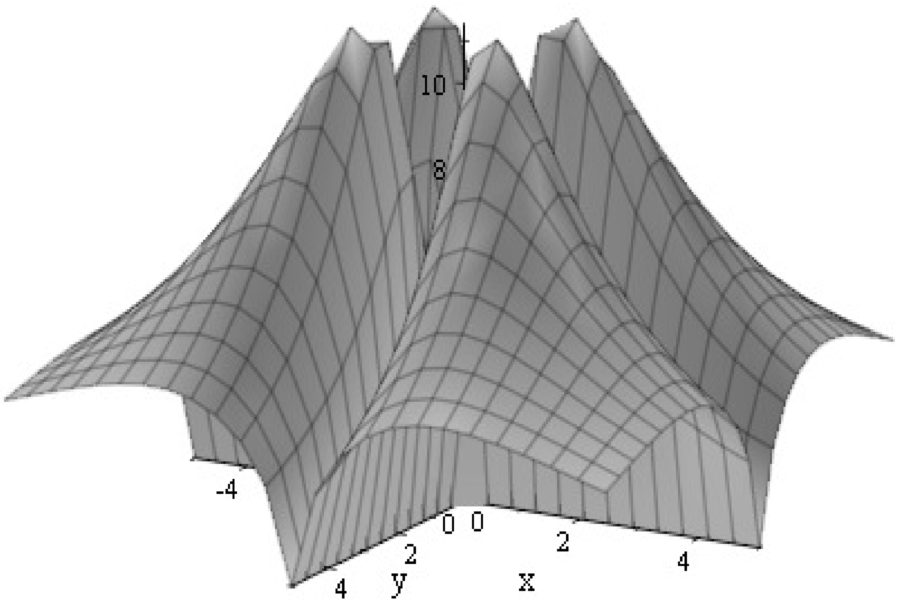
Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível





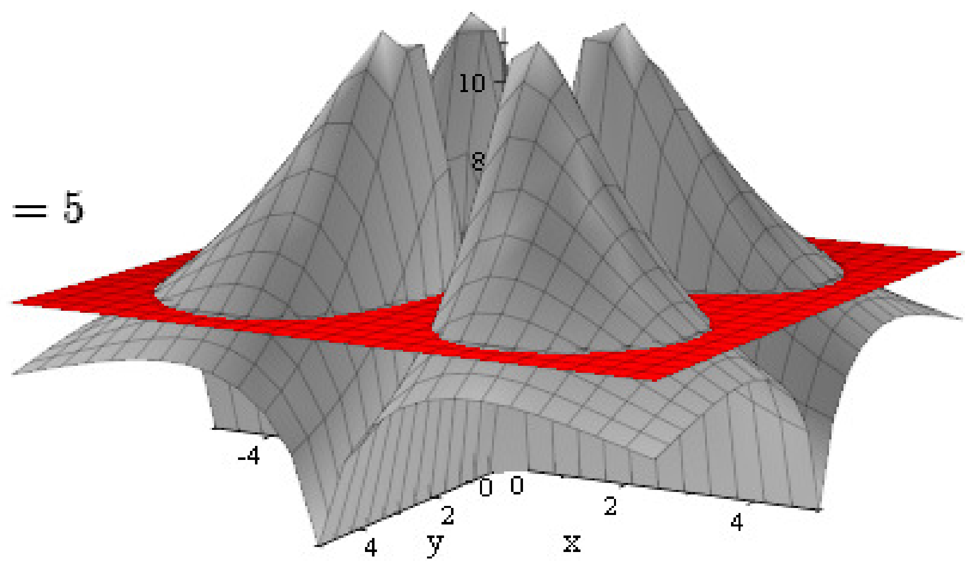
Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível



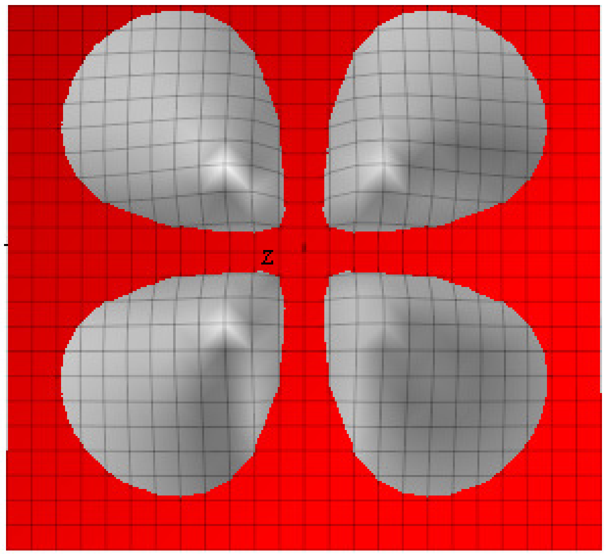
$$f(x,y) = 50\frac{\ln(|xy|+1)}{x^2+y^2+1}$$

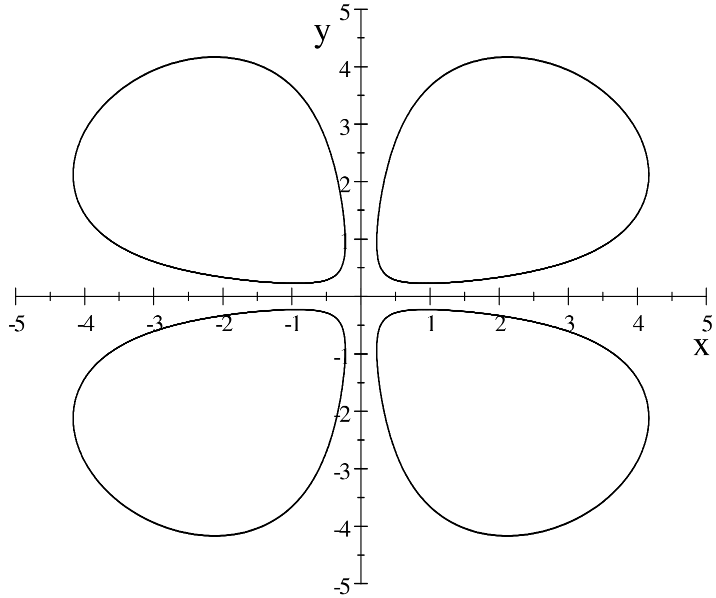
$z = 5$

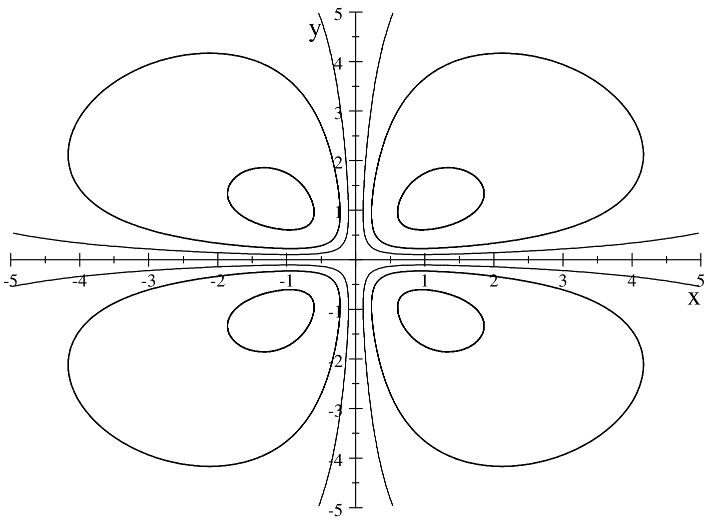


Exemplos:

Função Real de Variável Vetorial - Curvas de Nível





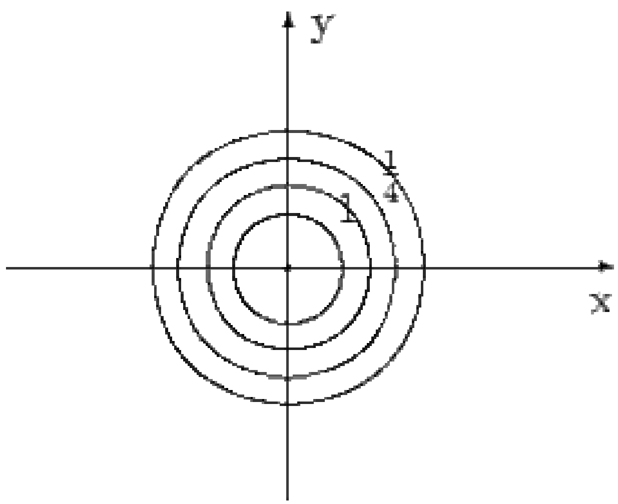


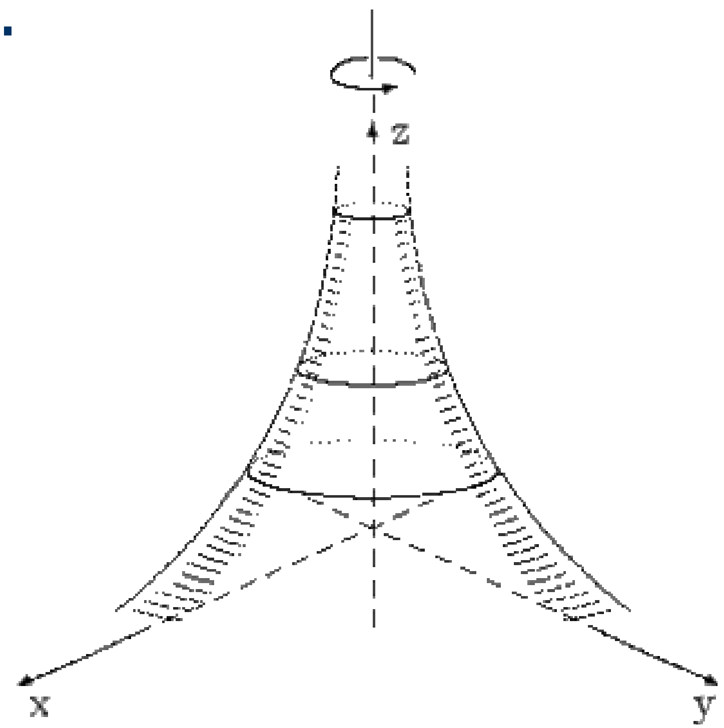
Exemplo

3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Curvas de nível: $x^2 + y^2 = c$.





Superfície de Nível

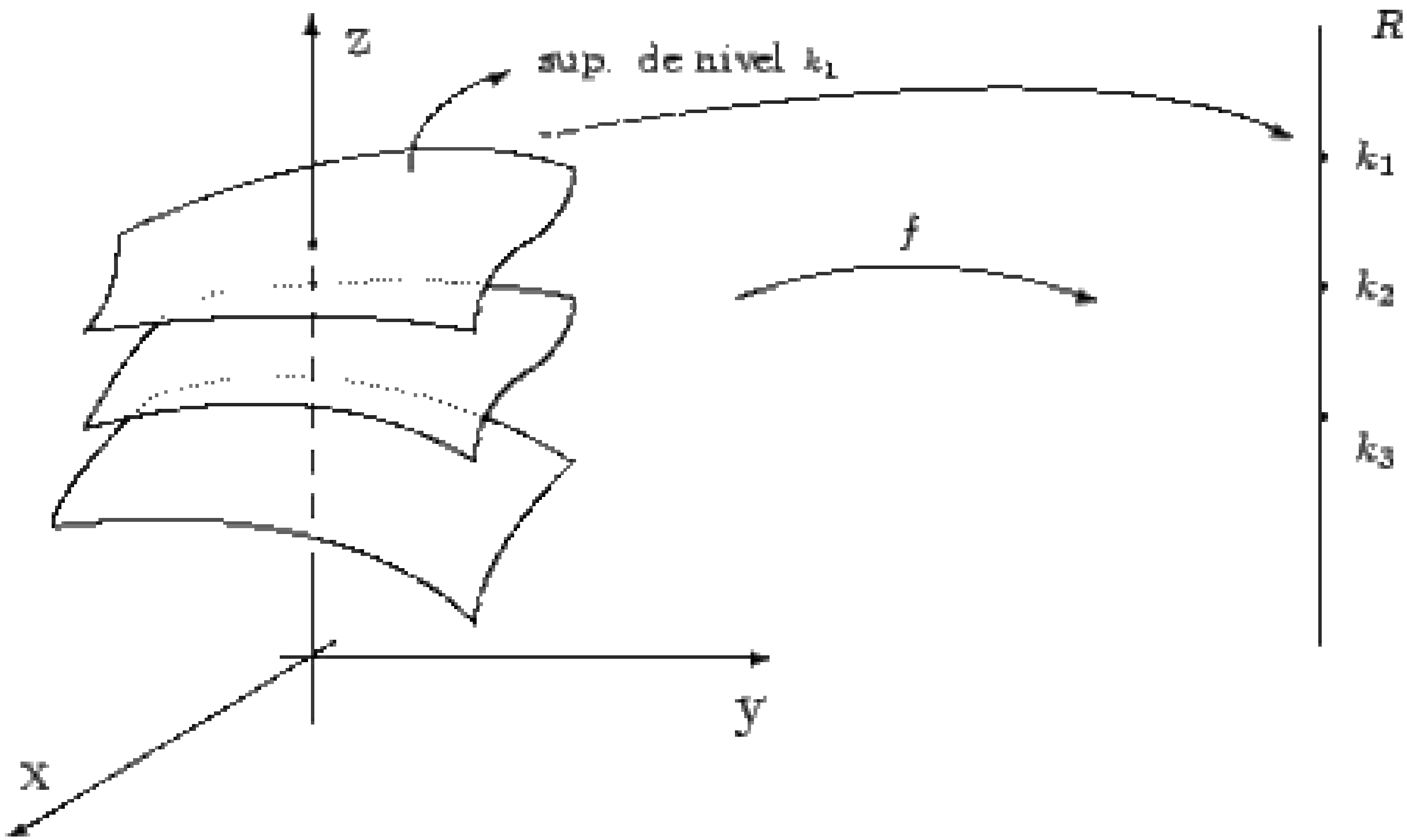
Se **f** é uma função de três variáveis **x**, **y**, **z** então, por definição, as **superfícies de nível** de **f** são os gráficos de **f(x, y, z) = k**, para diferentes valores de **k**.

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Superfícies de nível $k : \{(x, y, z) \in A$ tal que $f(x, y, z) = k\}$.

Em aplicações, por exemplo, se **f(x, y, z)** é a temperatura no ponto **(x, y, z)** então as superfícies de nível são chamadas **superfícies isotermas**. Se **f(x, y, z)** representa potencial elas são chamadas **superfícies equipotenciais**.

Superfície de Nível



Exemplo

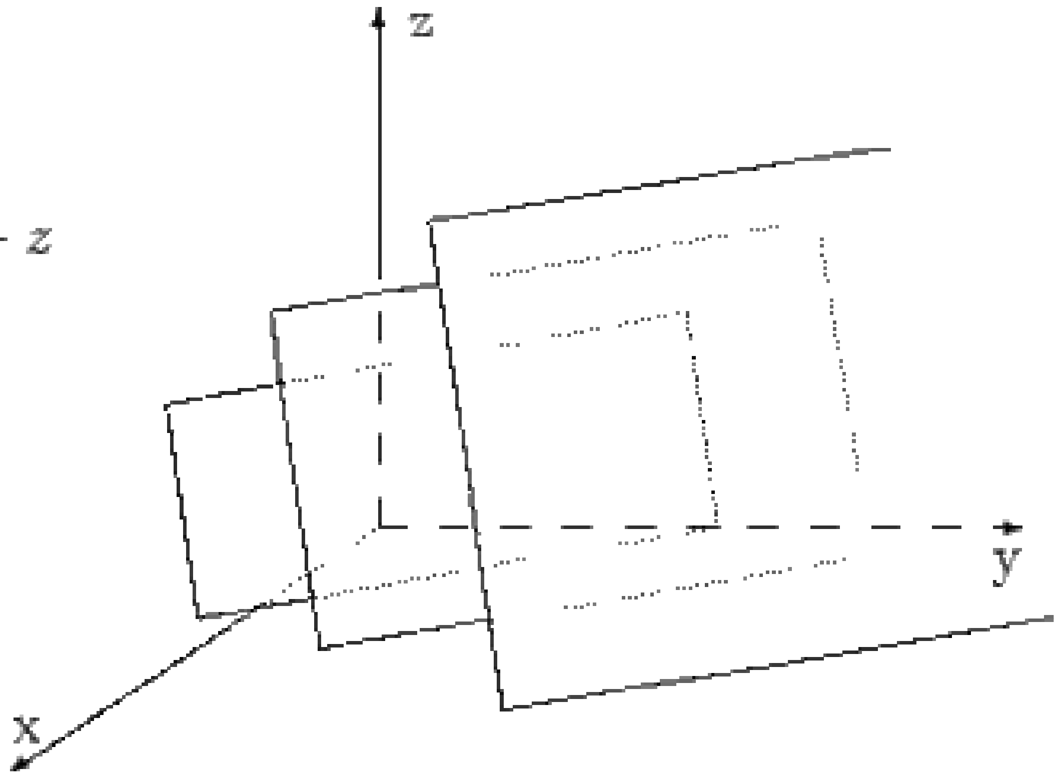
(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x, y, z) = 2x + y + z$

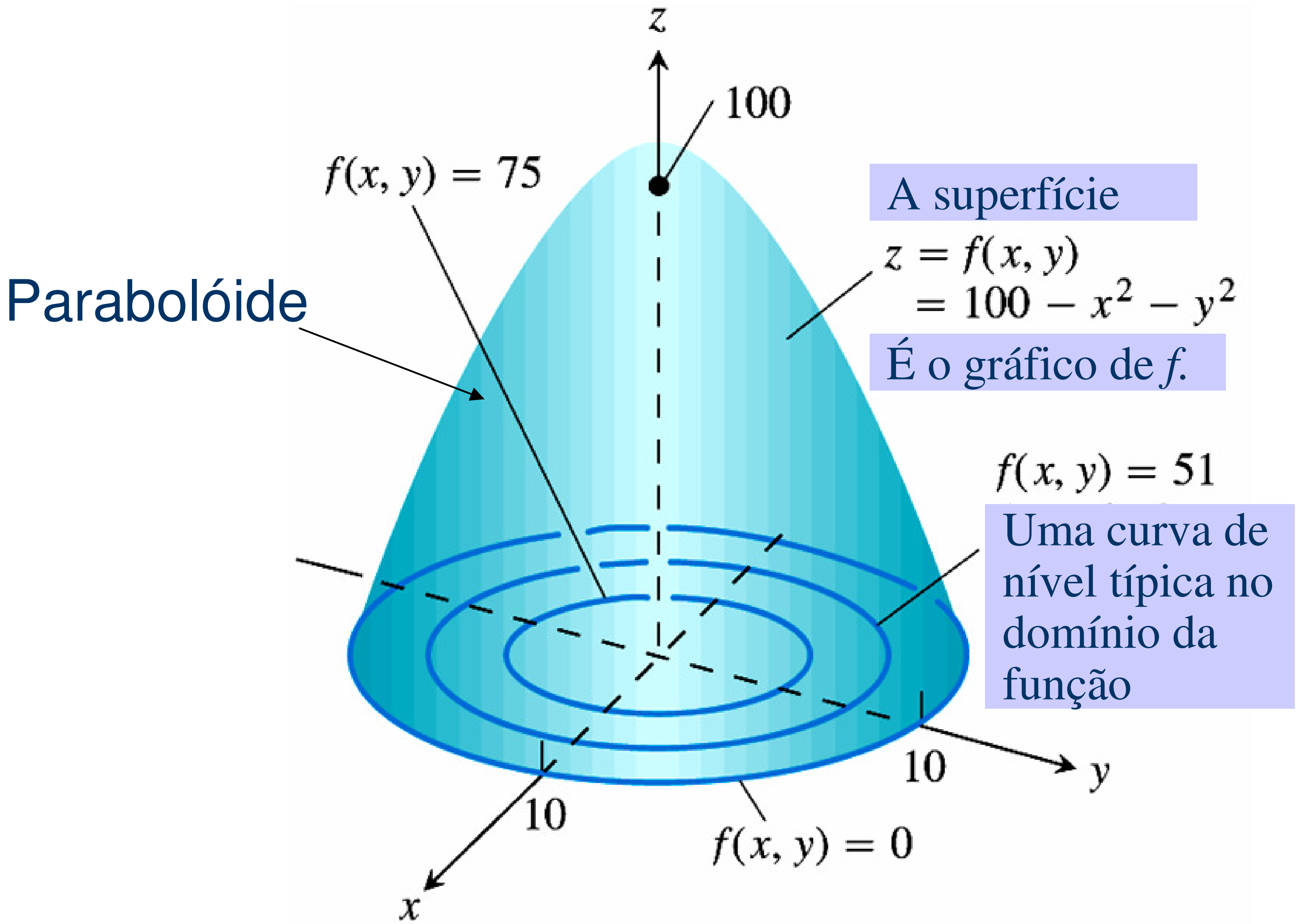
superfícies de nível

$2x + y + z = k$

planos paralelos

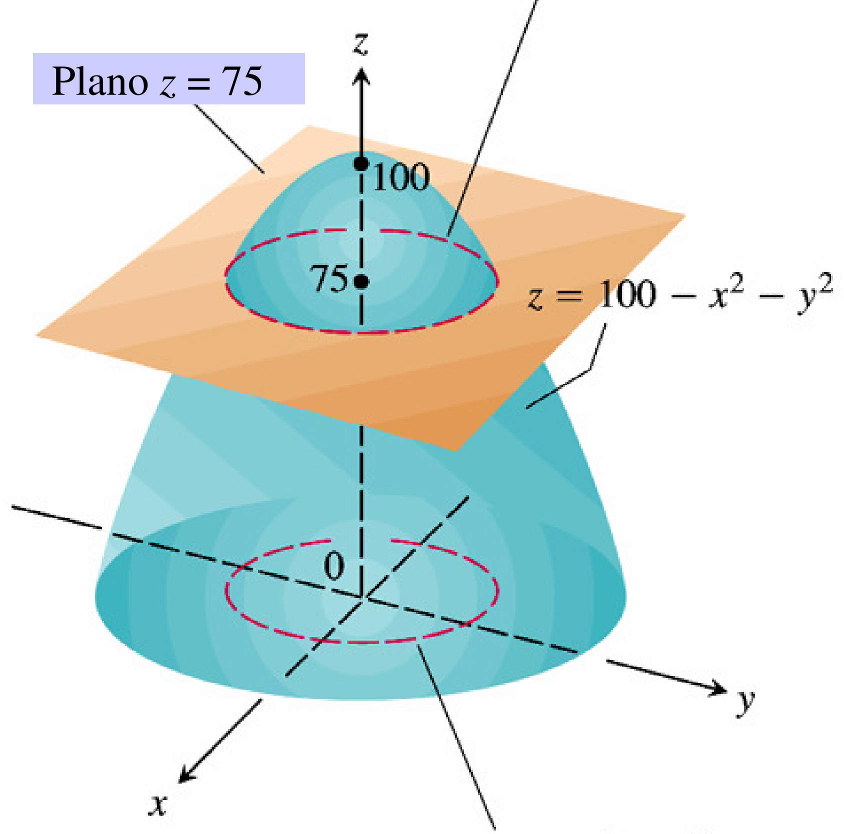


Superfície de Nível



Curvas de Nível X Curvas de Contorno

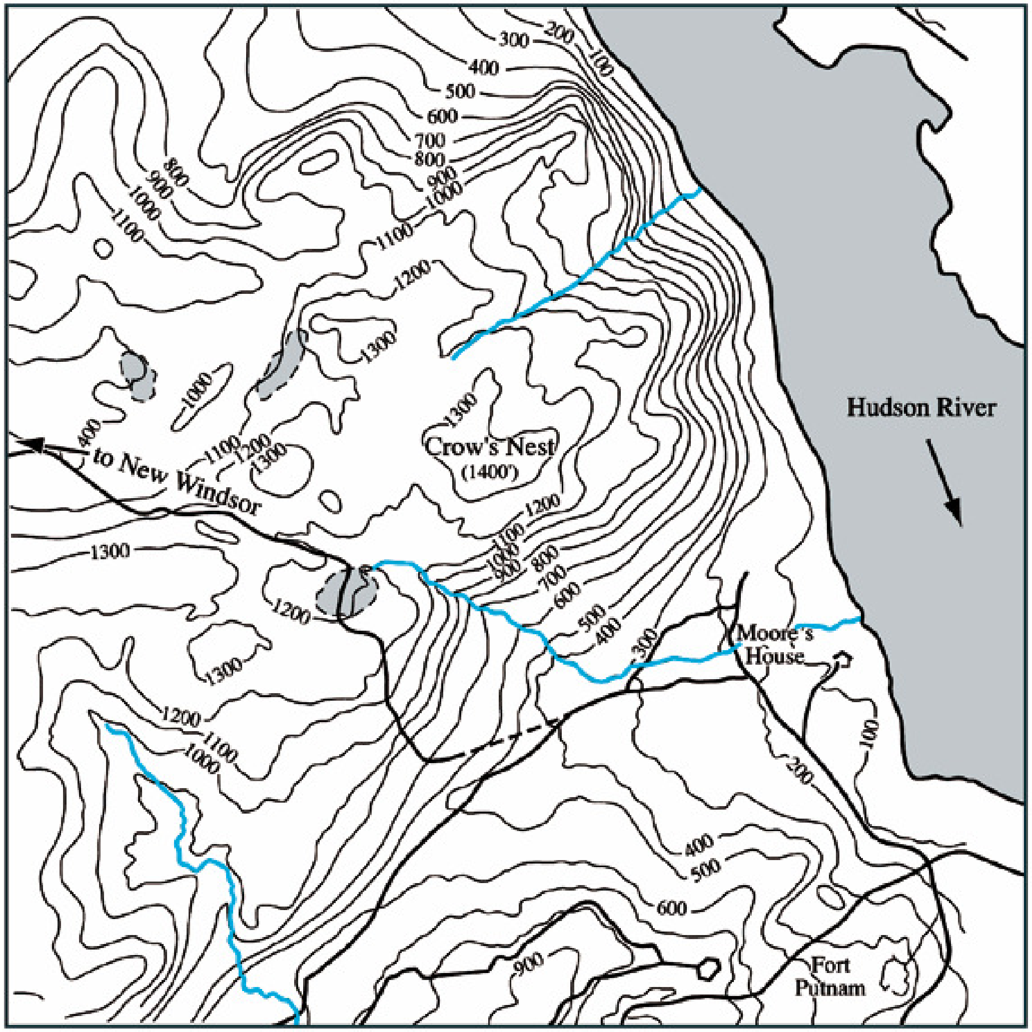
A curva de contorno $f(x,y) = 100 – x^2 + y^2 = 75$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no plano $z = 75$.



A curva de nível $f(x,y) = 100 – x^2 + y^2 = 75$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no plano xy.

Traço: é a curva definida pelo encontro da superfície f(x,y) com os planos xy, xz e yz.

Curvas de Nível



Bibliografia

- Abel Gomes, Irina Voiculescu, Joaquim Jorge, Brian Wyvill, Callum Galbraith **Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms**, Springer, 2009
- **“Computer Graphics: Principles and Practice”,** Foley,van Dam, Feiner and Hughes; Capítulo 11
- **“3D Computer Graphics”,** A. Watt, Capítulo 6