



**aula 10**

**Projeções Planas**

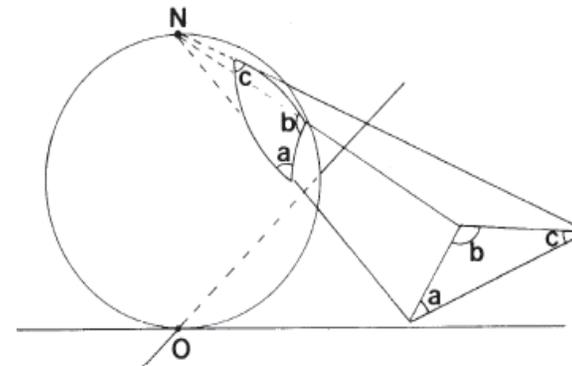
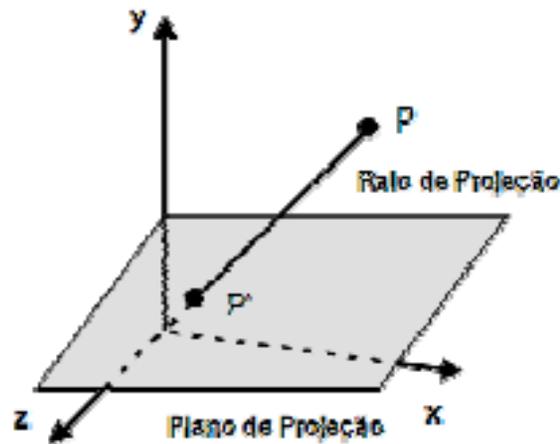
**IC/UFF - 2016**

tela de um museu de Montreal

# Projeções PLANAS:

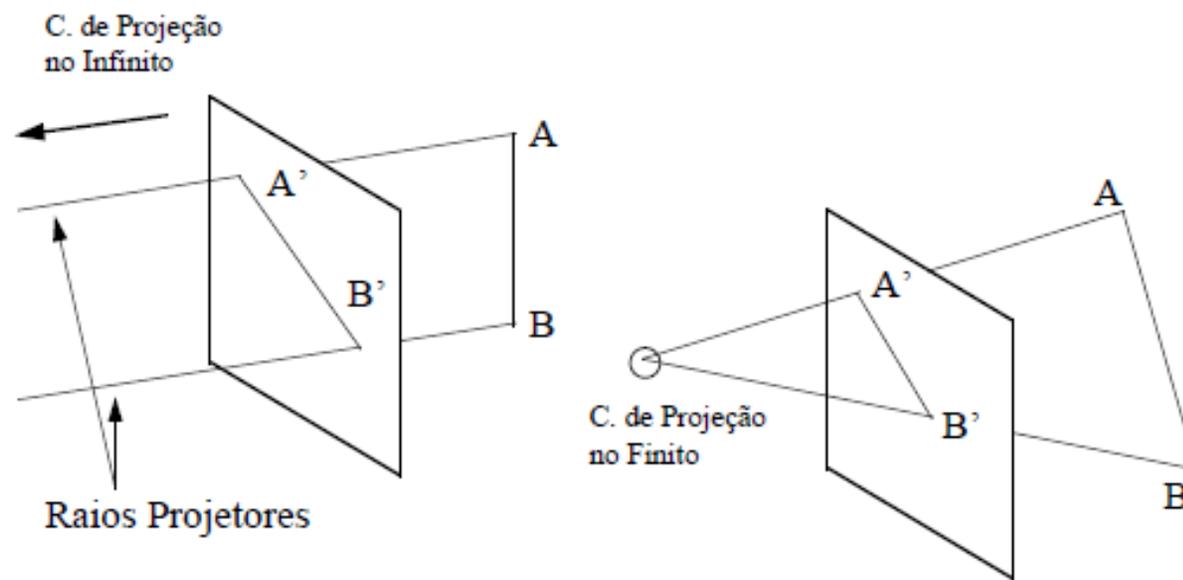
Elementos básicos:

- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.



# Classificação BÁSICA:

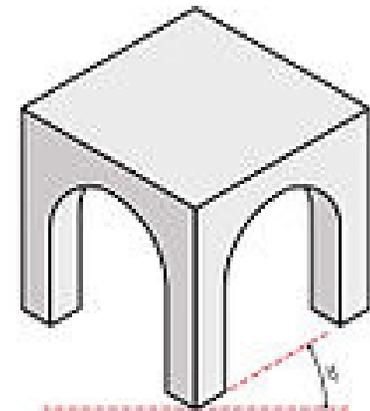
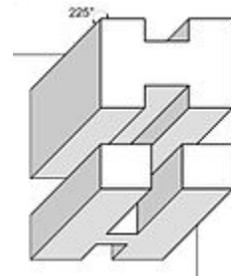
- Projeções paralelas e projeções perspectivas

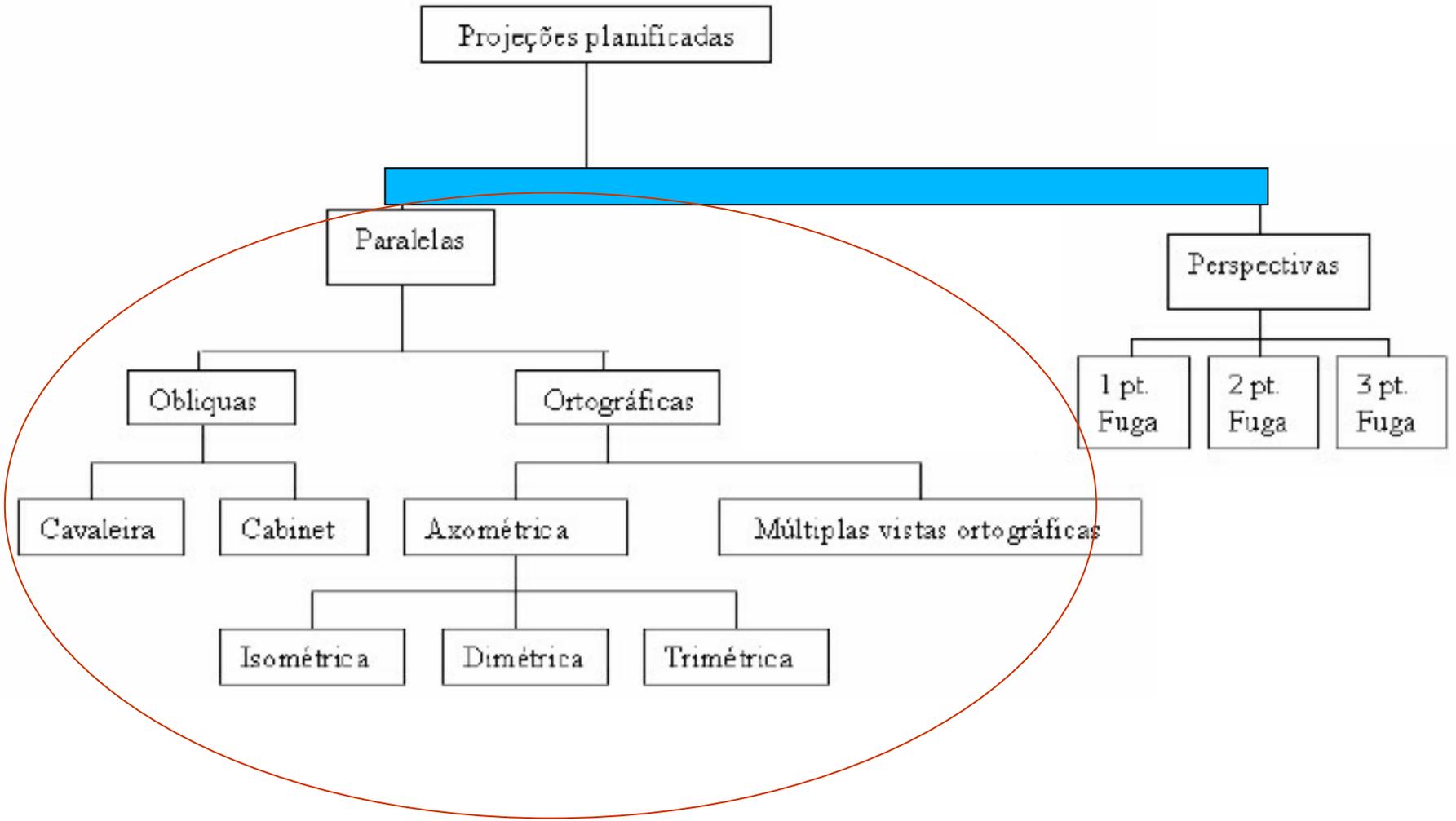


# Características:

- Projeções Paralelas

- O centro de projeção é localizado no infinito
- Todas as linhas de projeção são paralelas entre si;
- São tradicionalmente usadas em engenharia e desenhos técnicos;
- Em alguns casos preservam as dimensões do objeto;
- Não produzem imagem realista.



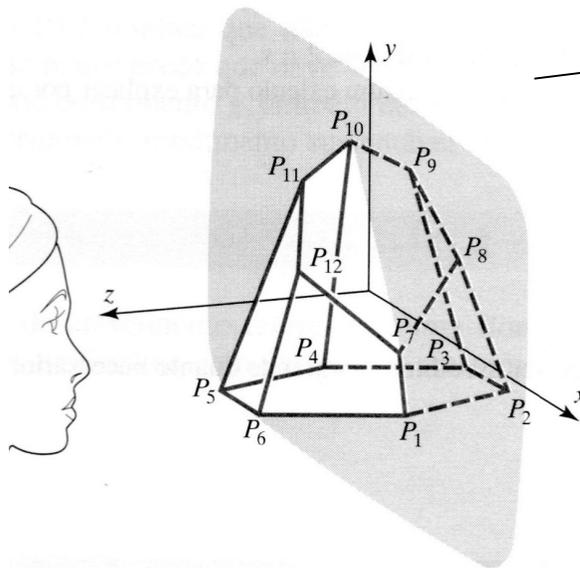


# Um objeto no espaço 3D

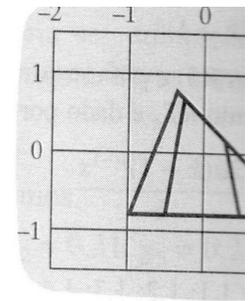
A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente Descartar uma das suas coordenadas .

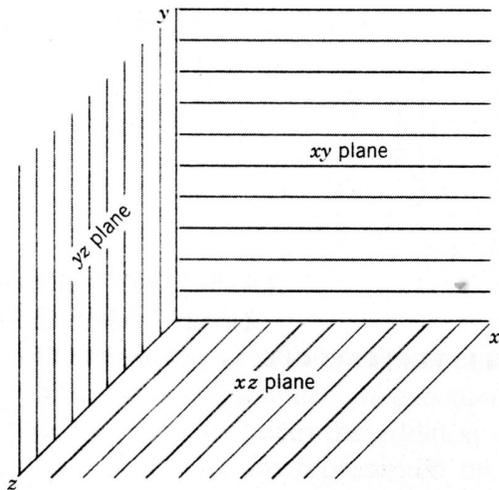
Este é um caso especial das projeções paralelas ortogonais ao plano de projeção , ou ORTOGRAFICAS

Se os **eixos principais do objeto** forem paralelos aos **sistemas de eixos** considerados, e ainda se os **raios projetores** forem paralelos aos eixos e **perpendiculares** ao plano de projeção.

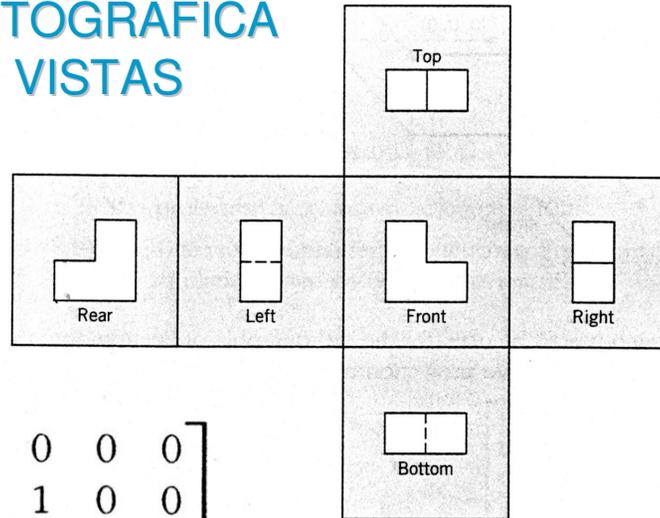
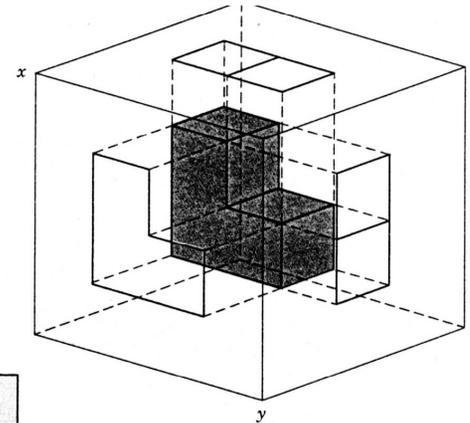


$P_1 : (1,000; -0,800; 0,000),$	$P_2 : (0,500; -0,800; -0,866),$
$P_3 : (-0,500; -0,800; -0,866),$	$P_4 : (-1,000; -0,800; 0,000),$
$P_5 : (-0,500; -0,800; 0,866),$	$P_6 : (0,500; -0,800; 0,866),$
$P_7 : (0,840; -0,400; 0,000),$	$P_8 : (0,315; 0,125; -0,546),$
$P_9 : (-0,210; 0,650; -0,364),$	$P_{10} : (-0,360; 0,800; 0,000),$
$P_{11} : (-0,210; 0,650; 0,364),$	$P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)$



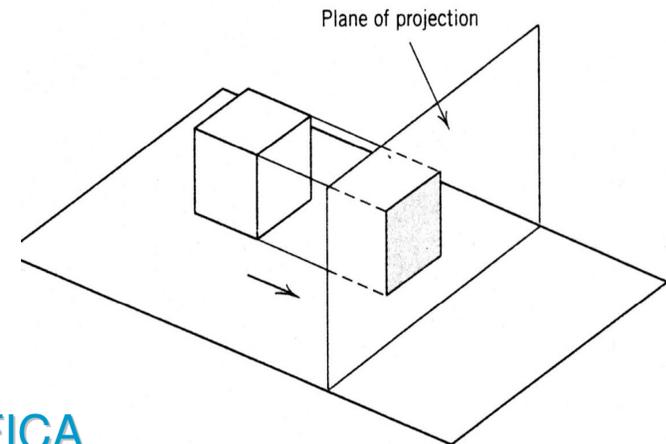


## Projeção paralela ORTOGRAFICA OU VISTAS



$$[x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array} \right]$$



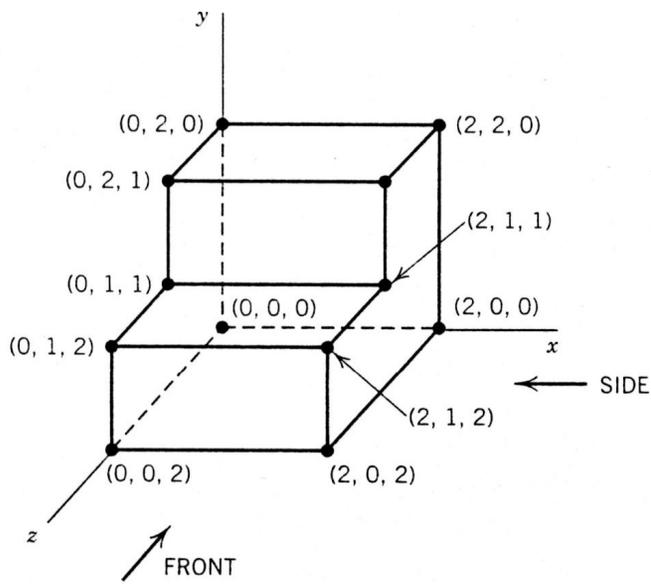
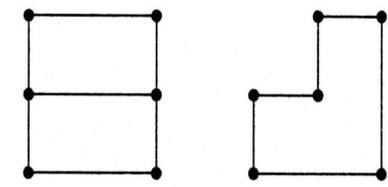
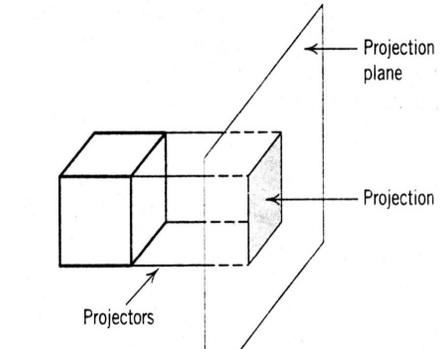
Projeção paralela ORTOGRAFICA no PLANO  $z=0$  (só restam  $x,y$ ) :

# Projeção paralela ORTOGRÁFICA no PLANO y=0:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{só restam } x,z)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(só restam } y,z) \\ \text{Projeção paralela} \\ \text{ORTOGRAFICA} \\ \text{no PLANO } x=0: \end{matrix}$$

$$[P^*]_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[P^*]_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

E SE TIVERMOS  
 Projeção paralela  
 ORTOGRAFICA  
 POR UM PLANO  
 PARALELO A x=0, i.e.  
 x=Tx ?

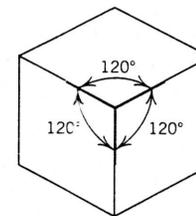
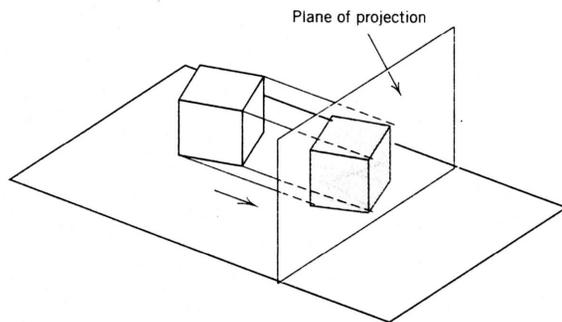
## Projeção paralela axonométrica

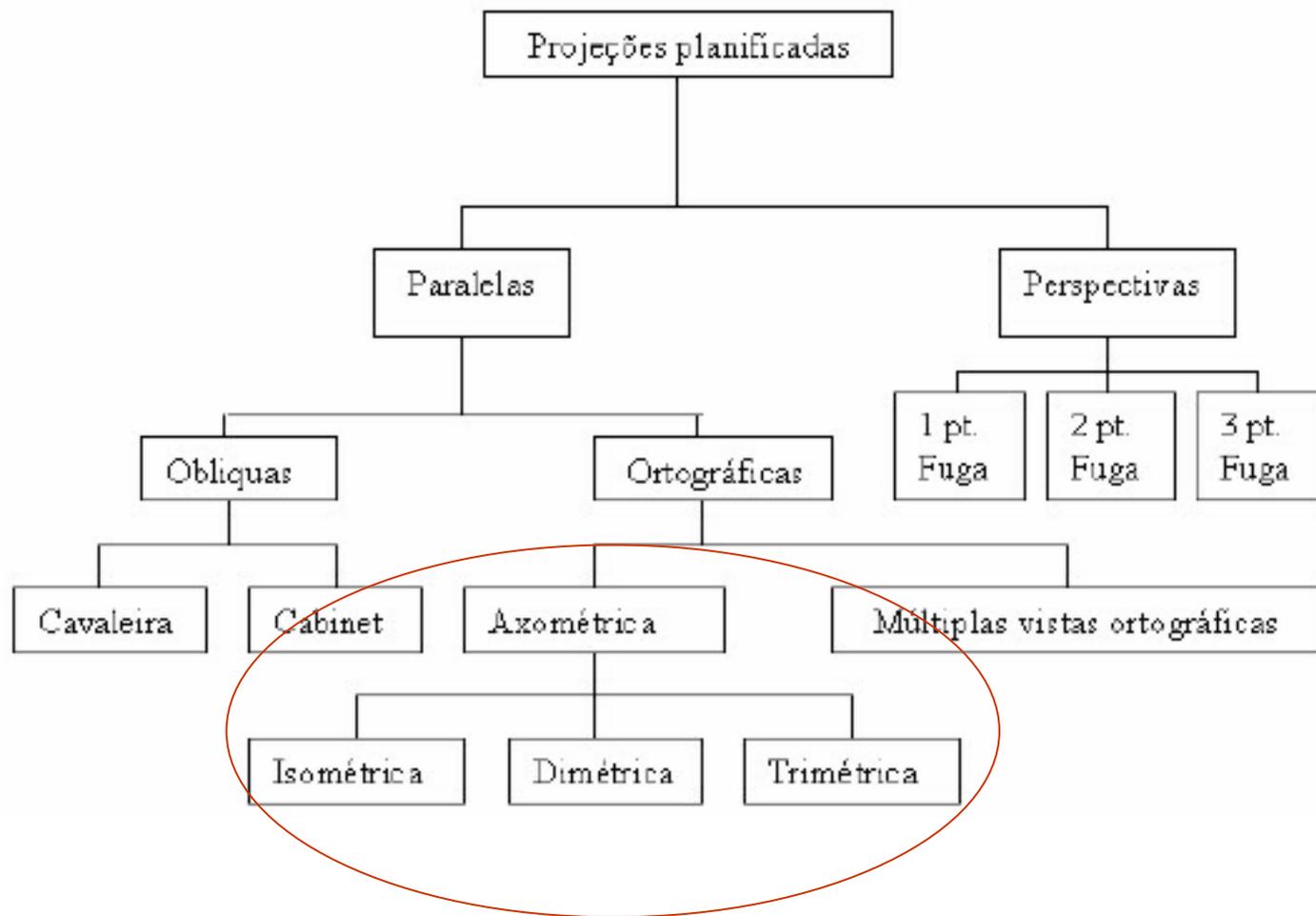
Raios projetores **paralelos** mas não na mesma direção dos eixos principais do objeto, e **perpendiculares** ao plano de projeção :

Orientação qualquer: **TRIMÉTRICA**

De forma que 2 eixos tenha a mesma métrica: **DIMÉTRICA**

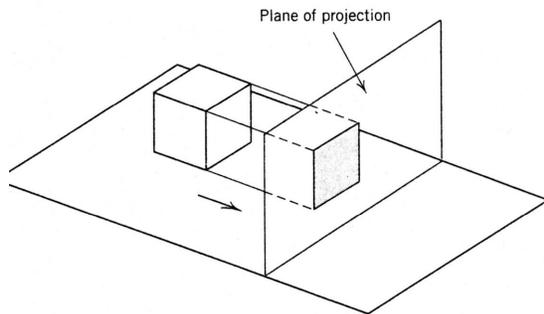
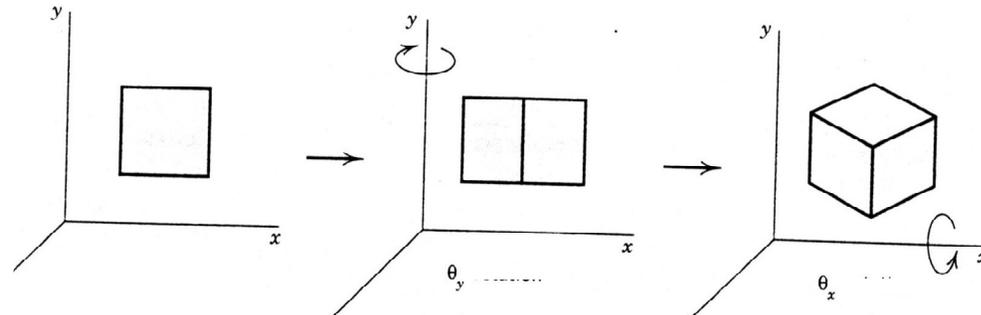
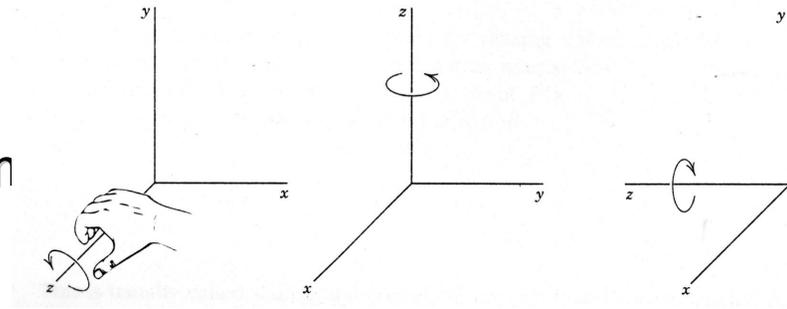
Os 3 eixos tenha a mesma métrica: **ISOMÉTRICA**





# Projeção paralela isom

Vamos **reposicionar** nosso cubo inicial!

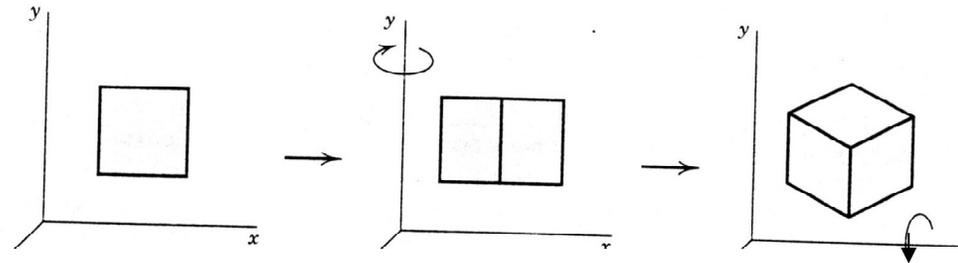


$$[M_{TILT}] = [T_R]_y^\theta [T_R]_x^\theta$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \sin \theta_x & -\sin \theta_y \cos \theta_x & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 \\ \sin \theta_y & -\sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paral



Reposicionar o cubo e

Depois **projetá-lo**

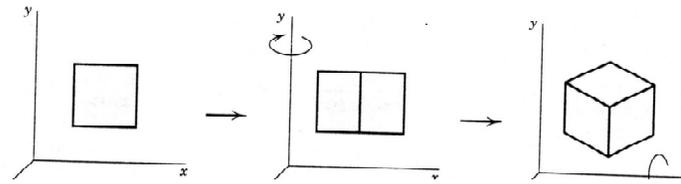
$$[M_{\text{TILT}}] = [T_R]_y^0 [T_R]_x^0$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \sin \theta_x & -\sin \theta_y \cos \theta_x & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 \\ \sin \theta_y & -\sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{\text{ISO}}] = [M_{\text{TILT}}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \sin \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & 0 & 0 \\ \sin \theta_y & -\sin \theta_x \cos \theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Projeção paralela iso



Os vetores unitários agora são:

$$x^* = [1 \ 0 \ 0 \ 1][M_{ISO}] = [\cos \theta_y \ \sin \theta_y \ \sin \theta_x \ 0 \ 1]$$

$$y^* = [0 \ 1 \ 0 \ 1][M_{ISO}] = [0 \ \cos \theta_x \ 0 \ 1]$$

$$z^* = [0 \ 0 \ 1 \ 1][M_{ISO}] = [\sin \theta_y \ -\sin \theta_x \ \cos \theta_y \ 0 \ 1]$$

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2 \theta_y + \sin^2 \theta_y \sin^2 \theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2 \theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2 \theta_y + \sin^2 \theta_x \cos^2 \theta_y}$$

Os vetores unitários em x e y:

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2 \theta_y + \sin^2 \theta_y \sin^2 \theta_x = \cos^2 \theta_x$$

Considerando só senos:  $1 - \sin^2 \theta_y + \sin^2 \theta_y \sin^2 \theta_x = 1 - \sin^2 \theta_x$

Simplificando a expressão:  $\sin^2 \theta_y (\sin^2 \theta_x - 1) = -\sin^2 \theta_x$

$$\sin^2 \theta_y = \frac{\sin^2 \theta_x}{1 - \sin^2 \theta_x}$$

Projeção  
paralela  
isométrica

Os vetores unitários em z e y:

$$|z^*| = |y^*|$$

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos:  $\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x (1 - \sin^2\theta_y) = 1 - \sin^2\theta_x$

Simplificando a expressão:

$$\sin^2\theta_y = \frac{1 - 2 \sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}$$

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

$$1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$$

$$\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$$

$$\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}$$

$$\frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x} = \frac{1 - 2 \sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}$$

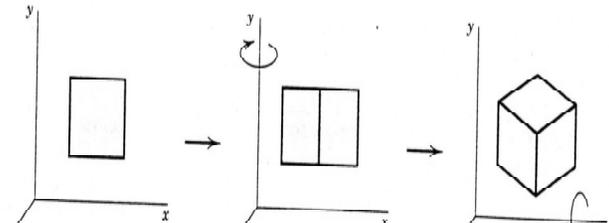
$$\sin^2\theta_x = 1 - 2 \sin^2\theta_x$$

$$\sin^2\theta_x = \frac{1}{3}$$

$$\theta_x = \pm 35.26^\circ$$

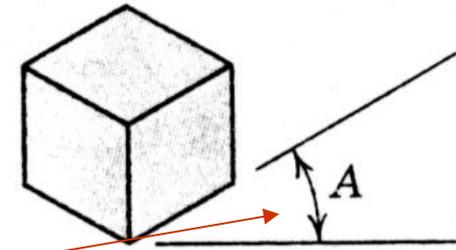
$$\sin^2\theta_y = \frac{1}{2}$$

$$\theta_y = \pm 45^\circ$$



## Projeção paralela isométrica

Em engenharia e desenho técnico **um ângulo importante** na projeção isométrica é o chamado **A** na figura ao lado (que ângulo é esse?)



Considerando o vetor unitário  $x$  :

$$x^* = [1 \ 0 \ 0 \ 1][M_{ISO}] = [\cos \theta_y \quad \sin \theta_y \sin \theta_x \quad 0 \ 1]$$

Se vê :

$$\tan A = \frac{x_y^*}{x_x^*} = \frac{\sin \theta_y \sin \theta_x}{\cos \theta_y}$$

como

$$\theta_y = 45^\circ, \sin \theta_y = \cos \theta_y,$$

Tem-se que:

$$\tan A = \pm \sin \theta_x = \pm \sin (35.26)^\circ$$

$$A = \pm 30^\circ$$

## Projeção paralela isométrica

Em engenharia e desenho técnico saber o **quanto muda o comprimento na projeção isométrica** é importante:

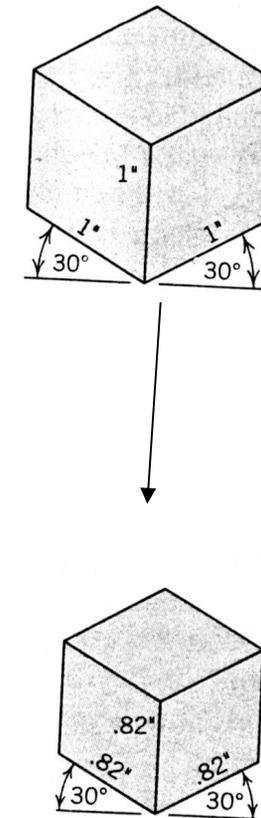
Vamos chamar o novo comprimento de  **$F$** , voltando as medidas dos vetores depois de projetados :

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

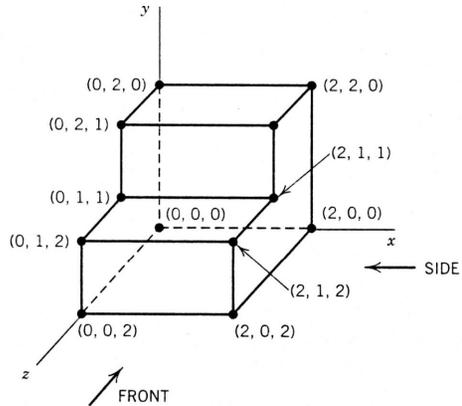
$$F = \frac{|y^*|}{1} = \sqrt{\cos^2\theta_x} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$$



O comprimento na projeção isométrica **muda 82%** !

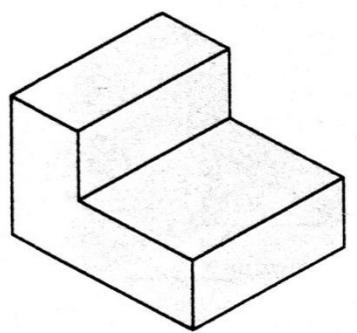
## Projeção paralela isométrica

Como ficaria nossa figura em isométrica no plano xy ou z=0?



$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

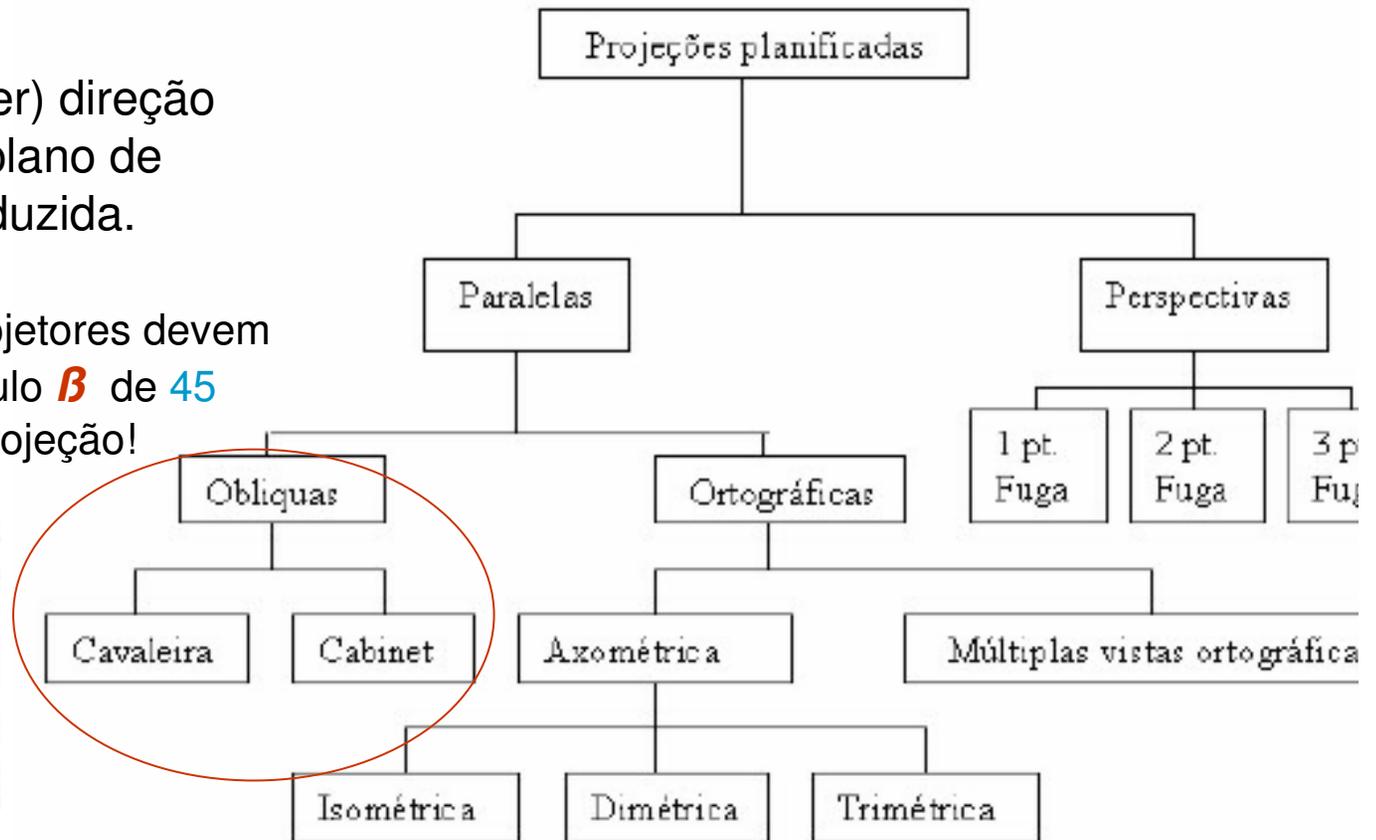
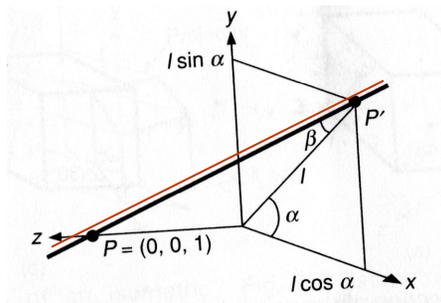
$$[P^*] = [P][M_{ISO}] = [P] \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_y \sin \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & 0 & 0 \\ \sin \theta_y & -\sin \theta_x \cos \theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.632 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 2.448 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.121 & 2.040 & 0.0 & 1.0 \\ 2.12 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & -0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 0.408 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

**Cavaleira** (cavalier) direção perpendicular ao plano de projeção não é reduzida.

Ou seja os raios projetores devem chegar com um ângulo  $\beta$  de 45 graus no plano de projeção!

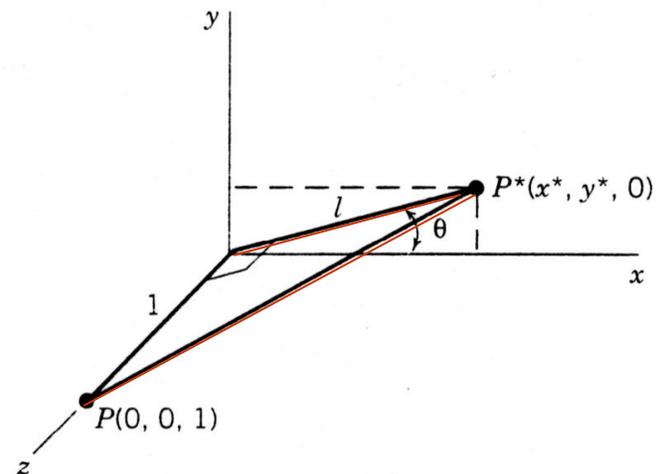
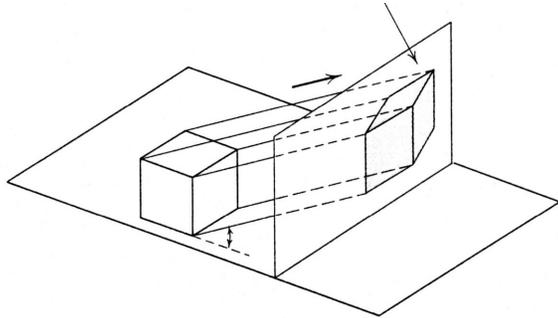


**Cabnet** direção perpendicular ao plano de projeção é reduzida a metade .

Ou seja os raios projetores devem chegar com um ângulo  $\beta$  cuja tangente seja  $0,5=1/2!$   $\beta = 26,5651^\circ$

## Projeção paralela ob

Raios projetores paralelos  
mas **não** perpendiculares  
ao plano de projeção



$$x^* = l \cos \theta$$

$$y^* = l \sin \theta$$

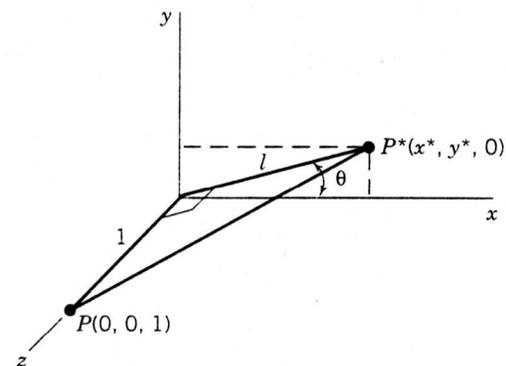
Geralmente essa é obtida  
**considerando** como um vetor  
**unitário** é mostrado:

$$[M_{\text{OBL}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l \cos \theta & l \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Projeção paralela ob

$$x^* = l \cos \theta$$

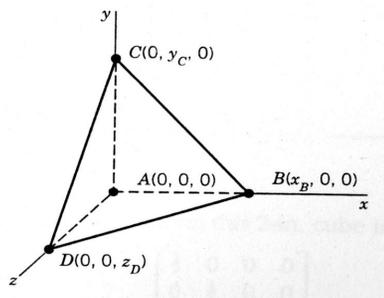
$$y^* = l \sin \theta$$



Como um tetraedro com os vértices:

$$P_1(3,4,0), P_2(1,0,4), P_3(2,0,5), P_4(4,0,3)$$

Ficaria?



$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l \cos \theta & l \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

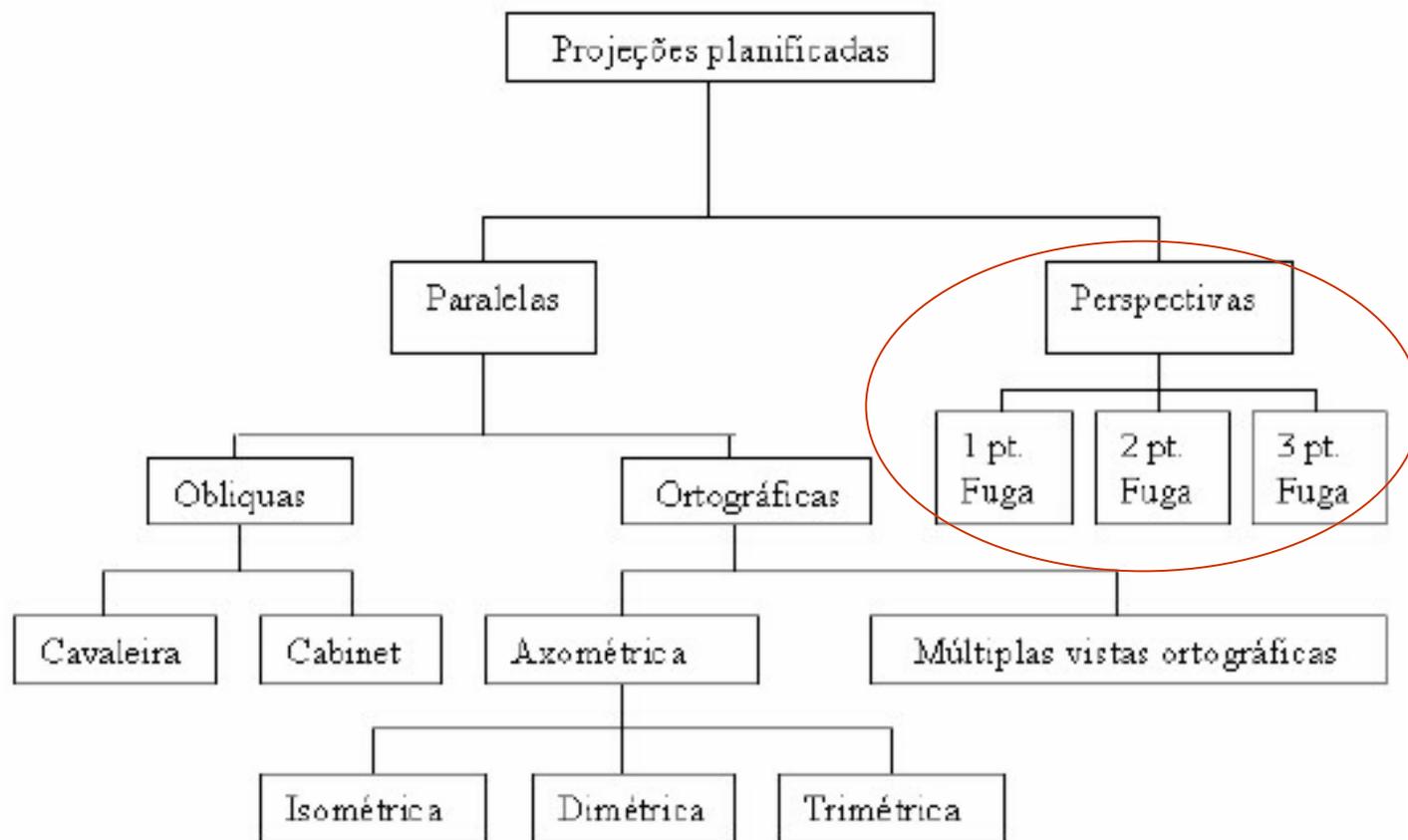
**Cavaleira (cavalier)  $l = 1$  com  $\theta = 45$**

$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = [P][M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

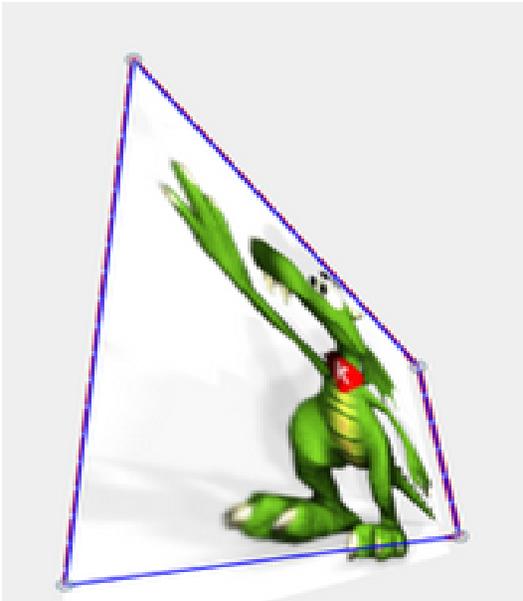
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3.83 & 2.83 & 0 & 1 \\ 5.54 & 3.54 & 0 & 1 \\ 6.12 & 2.12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:



# Transformação Perspectiva

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy+1 \end{pmatrix}$$



(10,10)  
(100,10)  
(100,100)  
(10,100)

$p=0,2$  e  $q = 0,1$   
 $(x,y,1) \rightarrow (x,y,px+qy+1)$

$(10/4, 10/4) = (2,5 ; 2,5)$   
 $(100/22, 10/22) = (4,5 ; 0,5)$   
 $(100/31, 100/31) = (3,2 ; 3,2)$   
 $(10/13, 100/13) = (0,7 ; 7,7)$

## Efeito em um ponto no infinito

*(pedindo desculpa aos matemáticos pela notação!)*

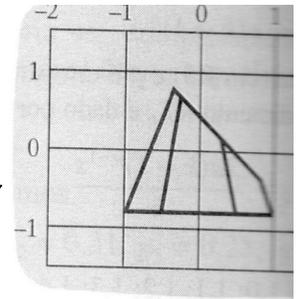
$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

# Pontos de Fuga

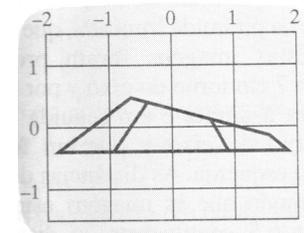
- Um ponto no infinito pode ser levado em um ponto  $P_0$  do plano afim.
- Família de retas paralelas que se intersectam no infinito são transformadas numa família de retas incidentes em  $P_0$ .
  - ♦  $P_0$  é chamado de **ponto de fuga**.
  - ♦ Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
    - Imagem de  $[x,0,0]$  ou  $[0,y,0]$ .

# Escala em torno da origem do espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$s_x=1,8 \ ; \ s_y=0,5 \ ; \ s_z=3,0$$



# Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)

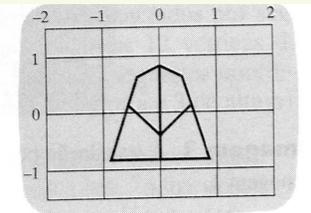
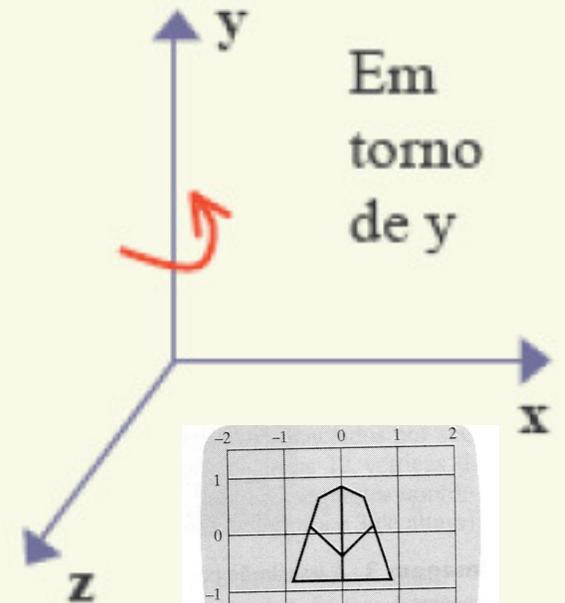
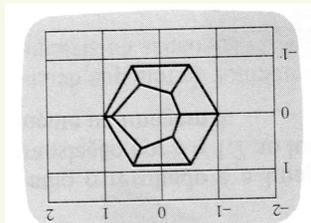
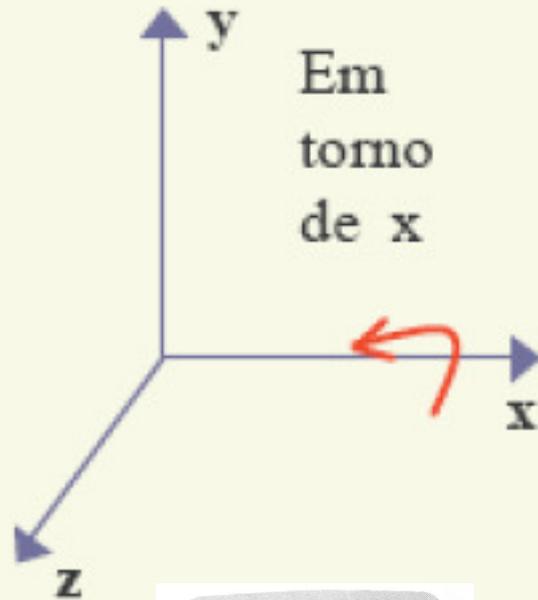
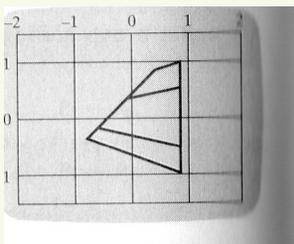
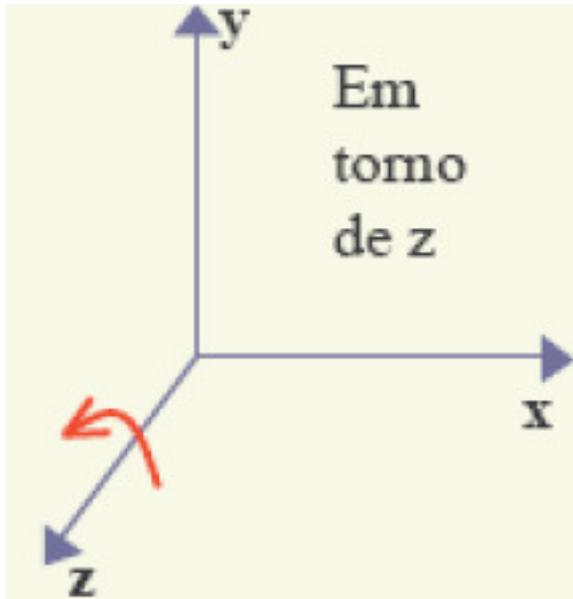
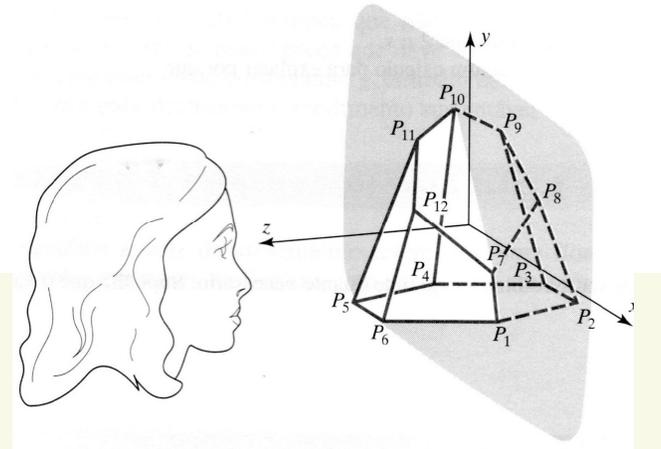


Imagem de uma cabeça por 00°

## Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

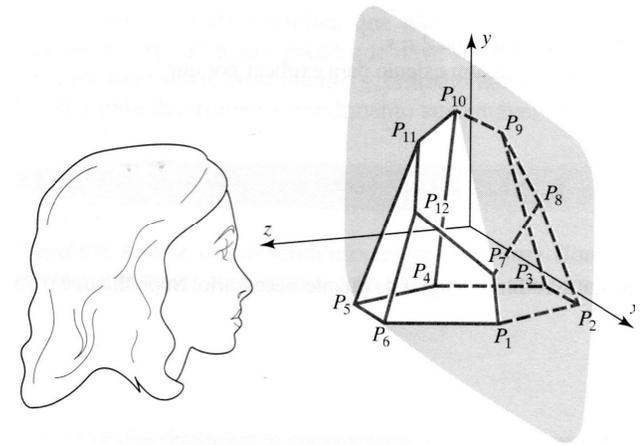
Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

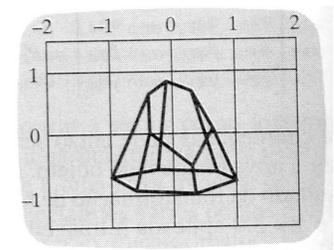
Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Em torno dos 3 eixos

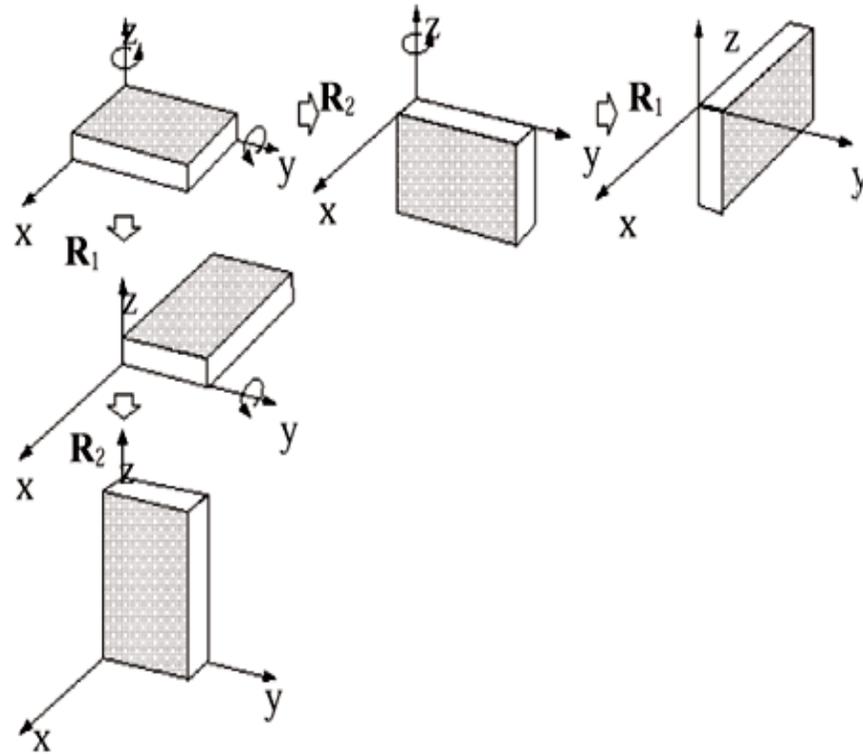


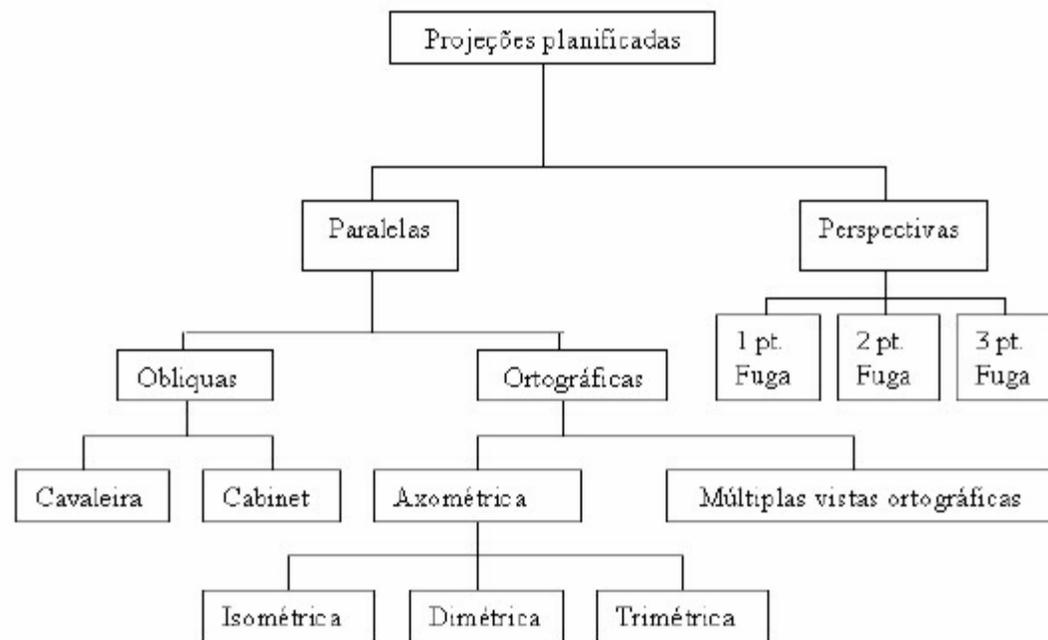
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Obs.

Rotações não são comutativas!





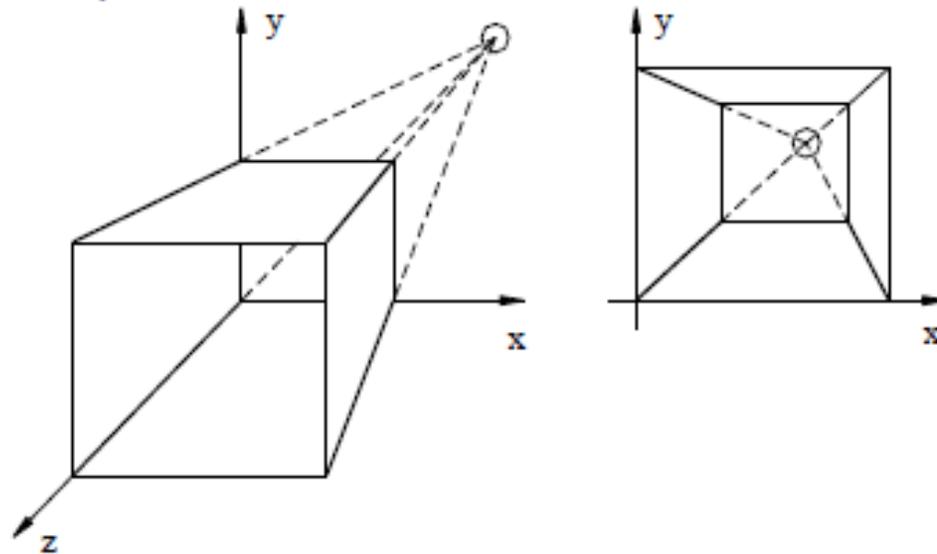
# Características

- Projeções Perspectivas

- Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
- Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
- Os raios projetores não podem ser paralelos.
- Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
- São mais realísticas na representação de objetos;
- Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;

# Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.



# Dois pontos de fuga:

Foto de  
uma rua  
de

(Podgorica)

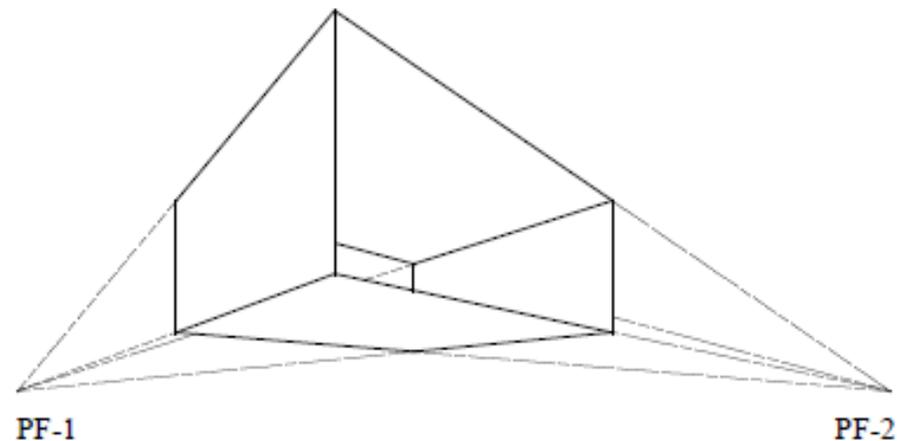
Montenegro

2014



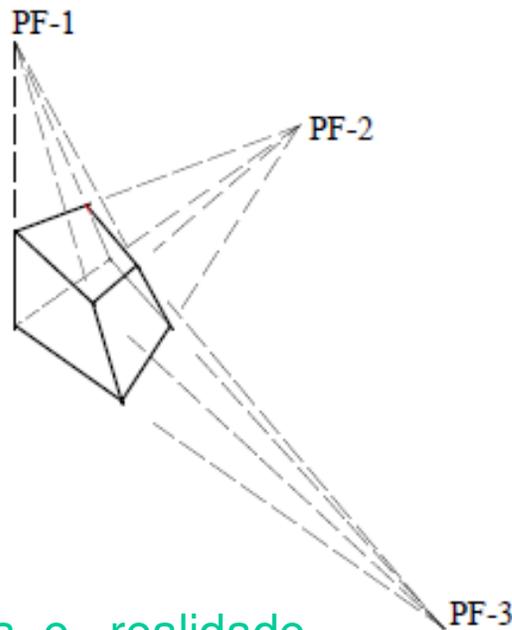
# Pontos de fuga principais

- Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



# Possível mas não é muito realista

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



3 pontos de fuga e realidade

# Mas ocorre se o observador estiver muito perto do objeto:

Museu  
De  
Mont.  
real



# Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva  $M$  do  $R^3$  é uma transformação linear do  $R^4$ .
- A matriz  $4 \times 4$  de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

# Transformação Perspectiva

- Ponto  $P$  do espaço afim é levado no hiperplano  $w = rz + 1$
- Se  $z = -1/r$ , então  $P$  é levado em um ponto no infinito.
- Pontos do espaço afim com  $z = 0$  não são afetados.

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

# Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto ideal, correspondendo a direção  $z$ , tem coordenadas  $[0, 0, 1/r, 1]$ 
  - ◆ Este é o ponto de fuga principal da direção  $z$ .
  - ◆ Semi-espaço infinito  $0 < z \leq \infty$  é transformado no semi-espaço finito  $0 < z \leq 1/r$ .

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

# Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:
  - ♦  $[-1/p, 0, 0, 1]$
  - ♦  $[0, -1/q, 0, 1]$
  - ♦  $[0, 0, -1/r, 1]$
- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

# Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
  - ◆ rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
  - ◆ transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

## Bibliografia:

Anton, H. Rorres, C. Algebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre 2001

E. Azevedo, A. Conci, [Computação Gráfica](#): teoria e prática, [Campus](#) ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, Reading, 1990.

Gardan, Y. , Numerical Methods for CAD , MIT press, Cambridge, 1985.