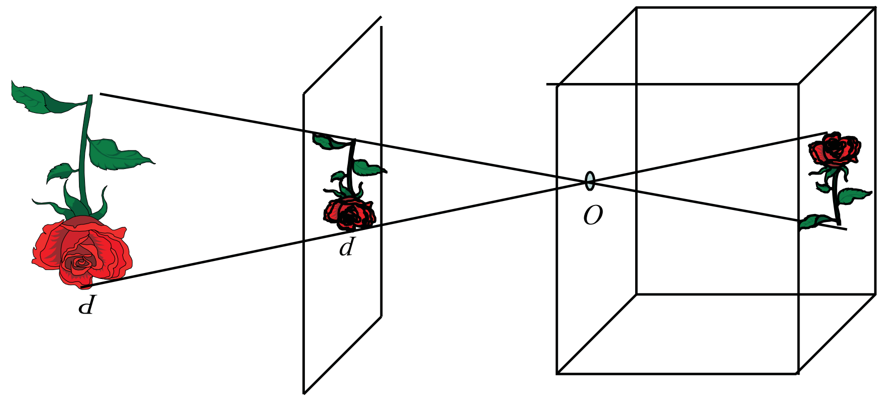
Aula 9 e 10

Projeções Planas

Como representar objetos 3D em dispositivos 2D?

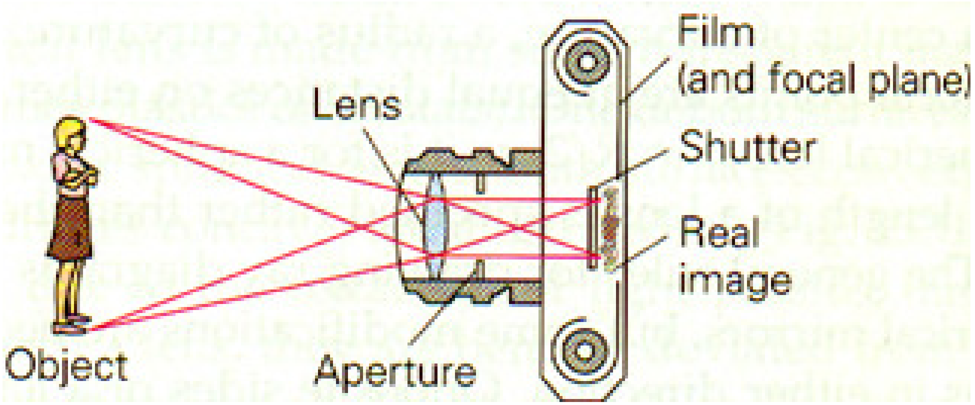


2019/1 – IC / UFF

Paginas 91 a 101 livro texto de **computacao grafica**

Como desenhar o mundo 3D no planos ?

Fazendo as projeções Planas



Material disponível no site do curso:
curso de **C.G.** - TCC 00.291 - IC/**UFF**
http://www.ic.uff.br/~aconci/CG.html

Nos seguintes arquivos pdf:
Transformando3D :

Projecoes.pdf

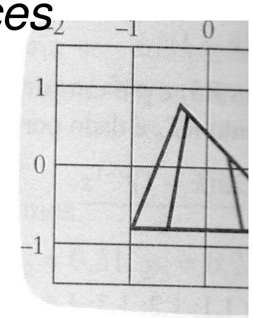
Aula-6.pdf – 2014/2 **e 2018/2 – IC / UFF**

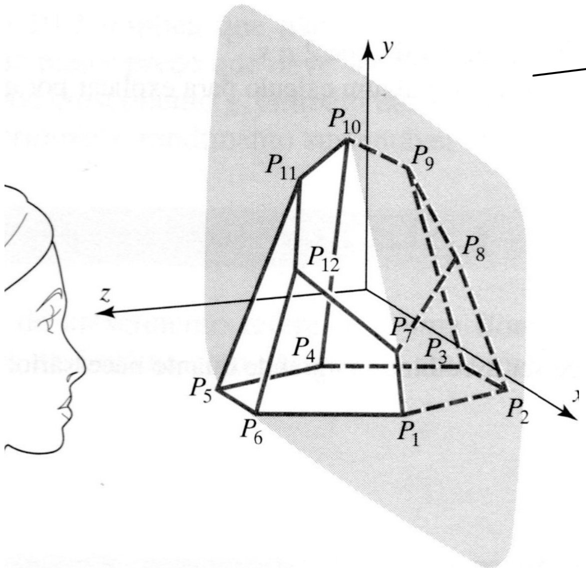
CG-Aula9-2016.pdf

CG-Aula6-2017.pdf

Um objeto é um conjunto de pontos no espaço 3D: conjunto de pontos das faces, conjunto de pontos das arestas e conjunto de pontos dos vértices

Já vimos como definir essa objeto pela sua topologia e geometria e como transformá-lo transformado todos os seus pontos a partir de seus vértices.





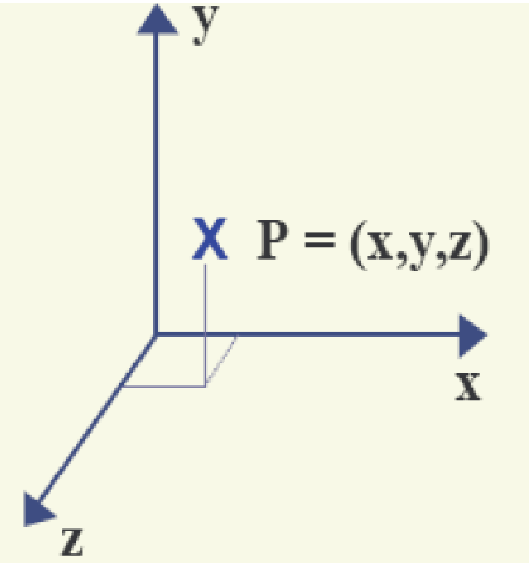
P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)

Coordenadas Homogêneas

- Reflexão, rotação e escala podem ser executadas com o uso de matrizes
- Mas a transformação de translação não.
- Para solucionar esse e outros problemas é recomendado o uso de **coordenadas homogêneas** para todas as operações.

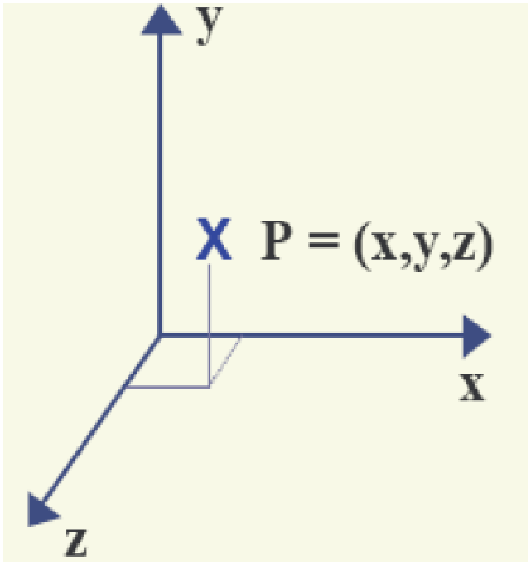
Coordenadas Homogêneas

- O **sistema de coordenadas homogêneas** (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por **(x', y', z', M).**
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação **(x, y, z) = (x'/M, y'/M, z'/M)**
- Quando M=1 a representação é a mesma do espaço cartesiano.



Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Mas repare que para usar as estruturas das coordenadas dos vértice definidas para o objeto, os arrays acima deverão estar todos transpostos.

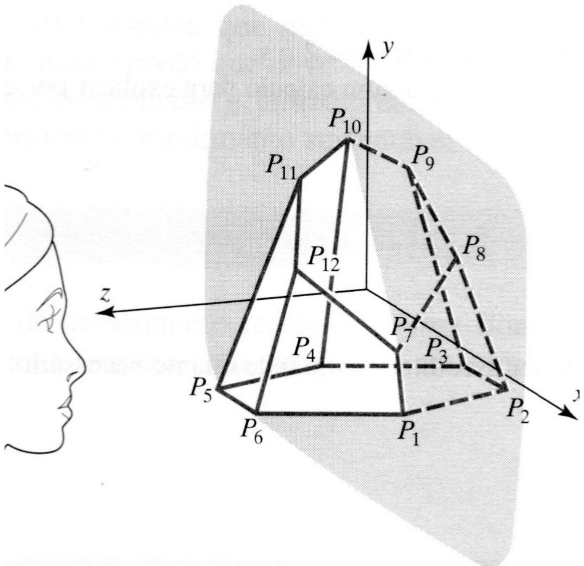
Os vértices também devem todos ser acrescentados da coordenada homogênea (SCH), para cada vértice Pi do objeto, i=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

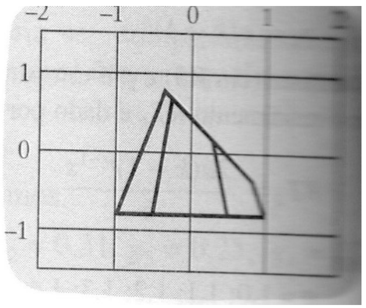
P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)

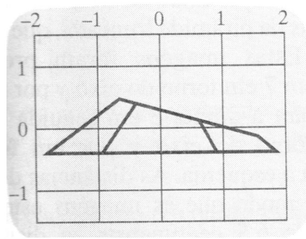
Escala em torno da origem do espaço 3D

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

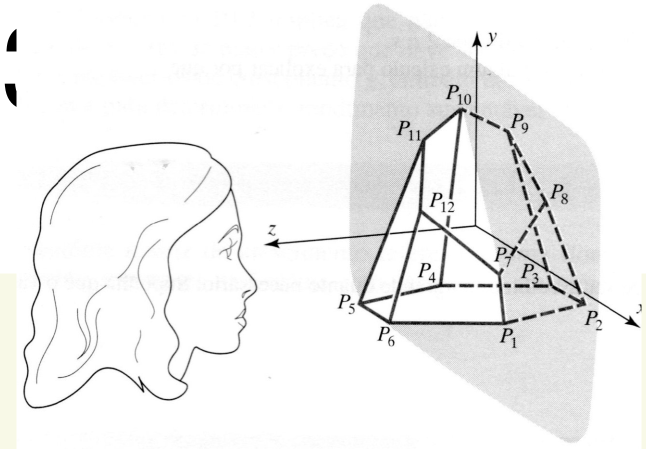
s_x=1,8 ; s_y=0,5 ; s_z=3,0

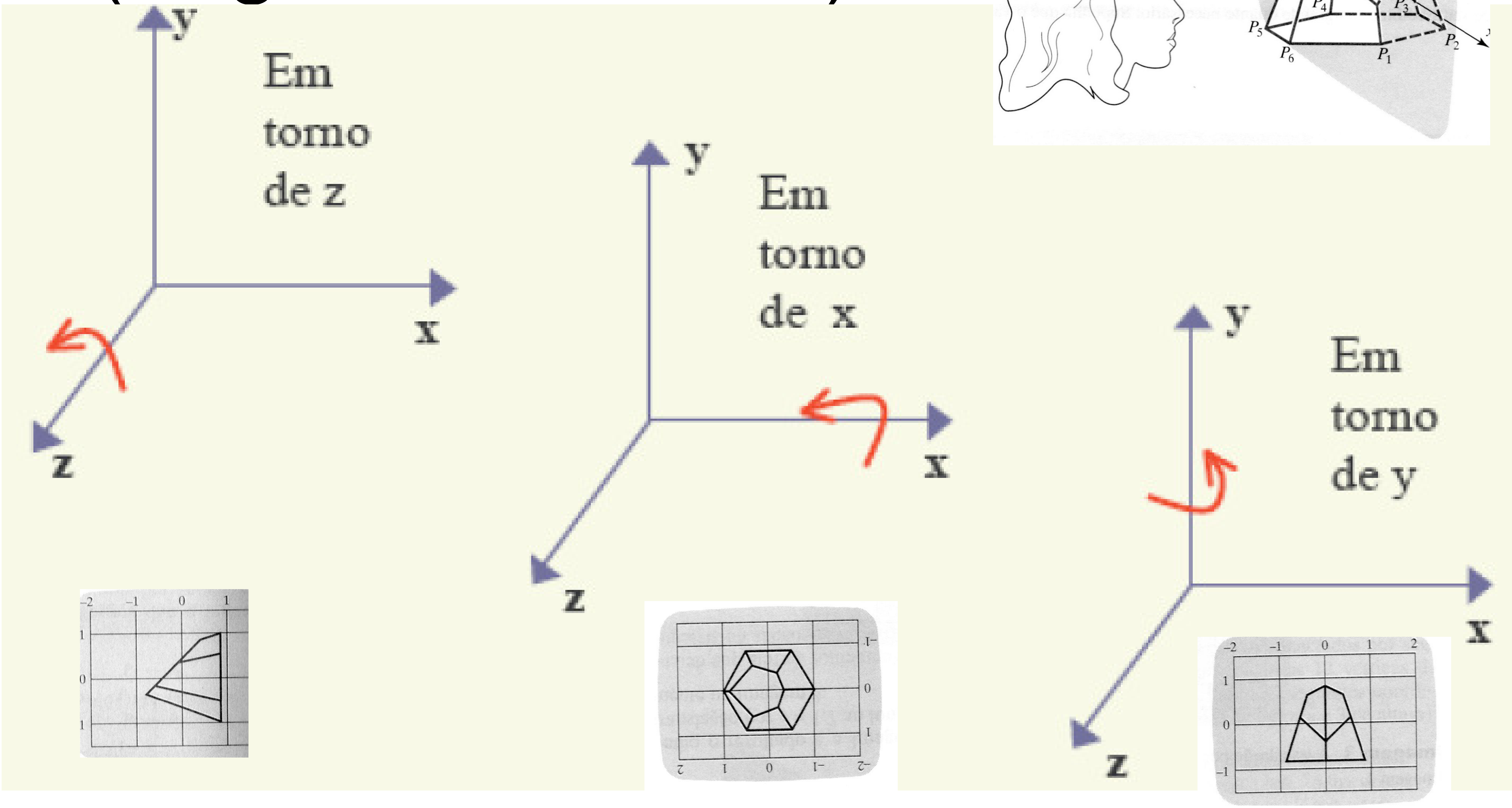






Rotações no Espaço 3
(ângulos de Euler)





rotações

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de X

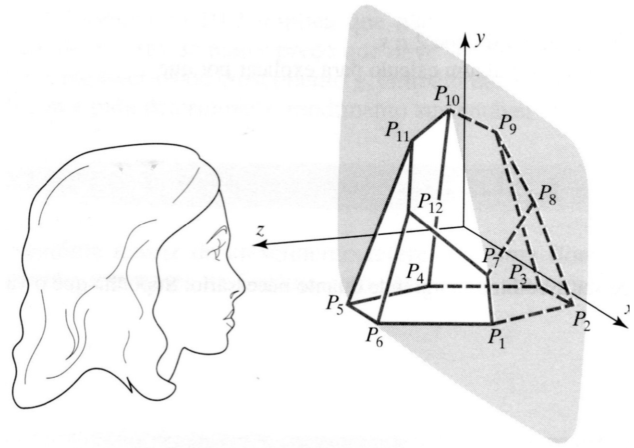
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de Y

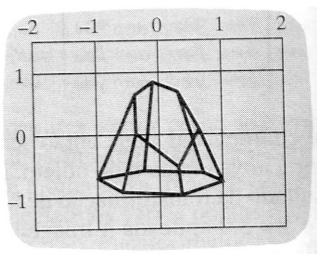
Matriz de Transformação final

- Para evitar que diversas operações matemáticas sejam feitas individualmente é criada uma **matriz de transformação pela multiplicação de toda em coordenadas homogêneas que pode fazer todos os efeitos (aplicar todas as transformações) de uma vez**
- Esta matriz é denominada **matriz de transformação corrente** e é utilizada para transformação de todos os vértices do objeto

Exemplo de rotação em torno dos 3 eixos



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



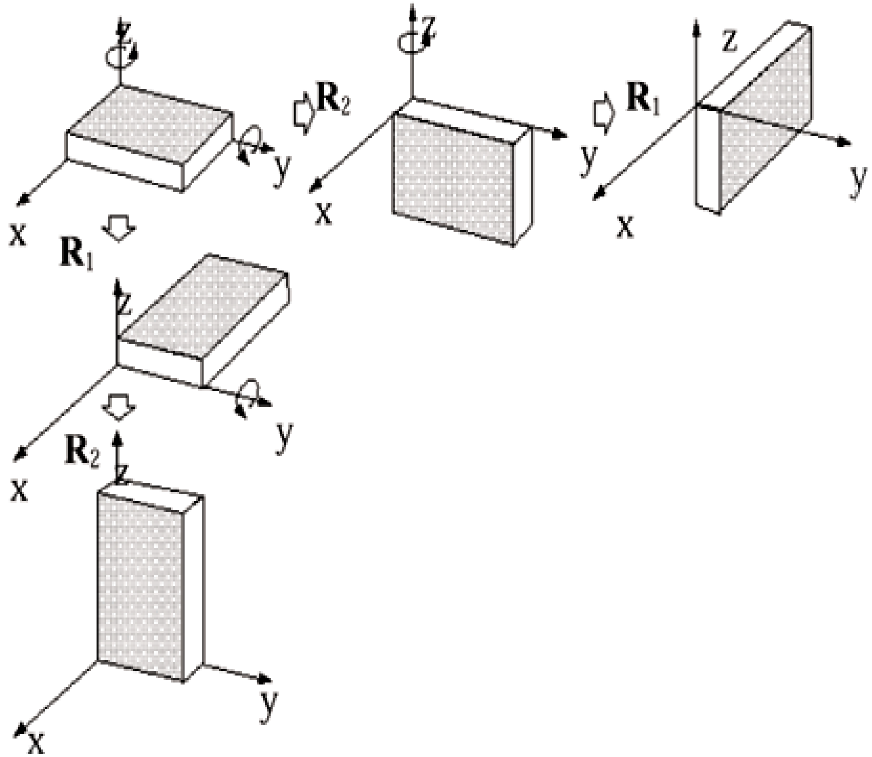
Escopo de Transformações

- Diversas podem ser feitas em serie e aplicadas de uma só fez, mas a ordem é muito importante

Pois as transformações nem sempre são comutativa !!!

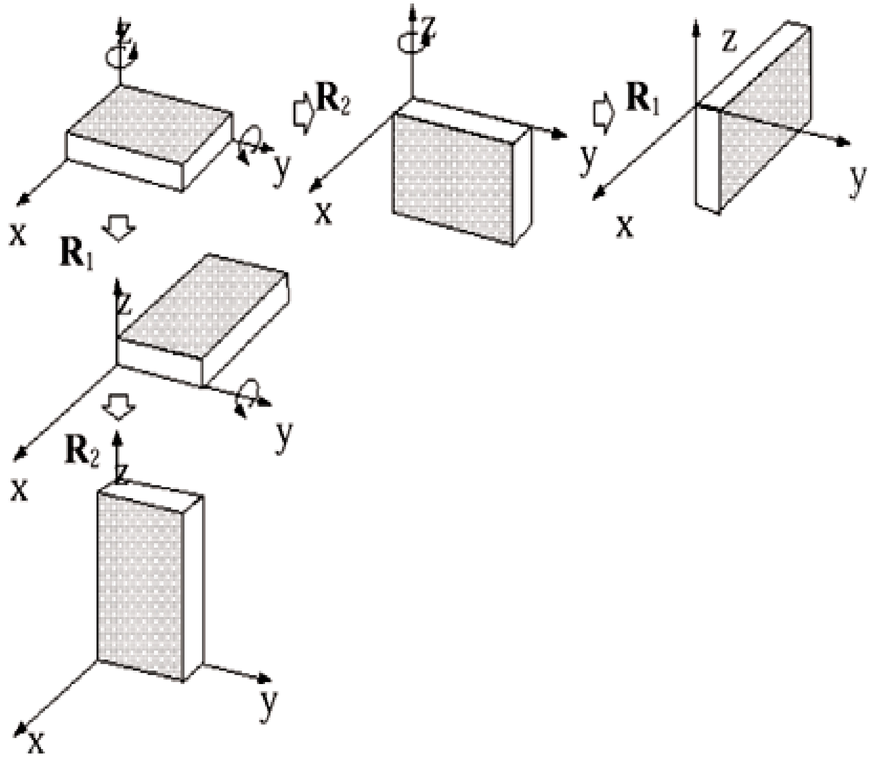
A ordem é importante.

- Diversas transformações não são comutativas!



Por exemplo

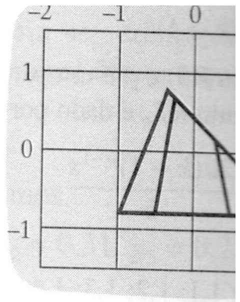
Rotações não são comutativas!

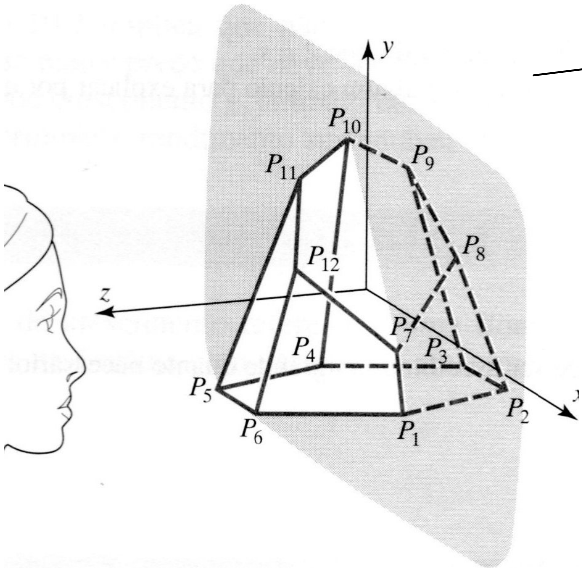


Mas como apresentar um objeto do espaço 3D na tela 2D?

A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente
Fazer o que fizemos nos desenhos desta aula ate aqui:
Descartar uma das suas coordenadas .

*Se os **eixos principais do objeto** forem paralelos aos **sistemas de eixos** considerados, e ainda se os **raios projetores forem paralelos aos eixos** e **perpendiculares** ao plano de projeção como ela fica ?*



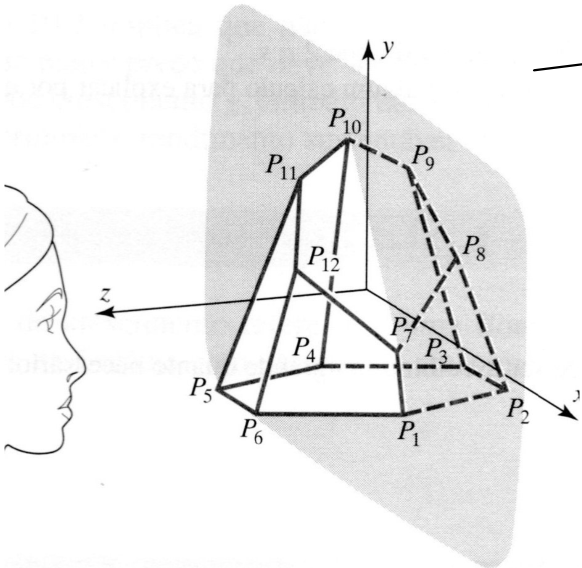


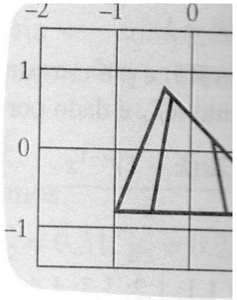
P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000),	P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866),	P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866),	P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000),	P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364),	P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364),	P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)

Um objeto no espaço 3D

*Pode ser visto desta forma se você o está vendo de frente em relação aos seus **eixos principais** e bastante longe para não ter o efeito de perspectiva.*

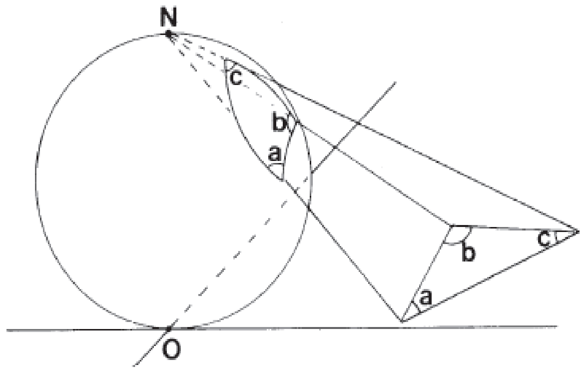
*Este é um caso especial das **projeções paralelas ortogonais ao plano de projeção , ou ORTOGRAFICAS***



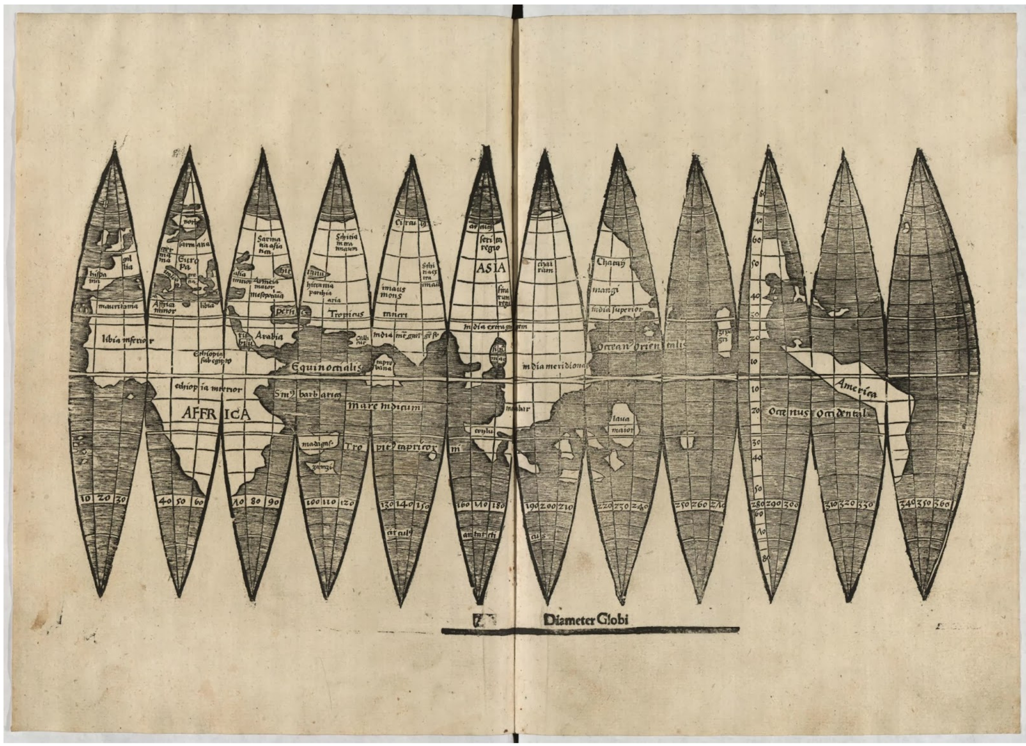


P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)

Projeções



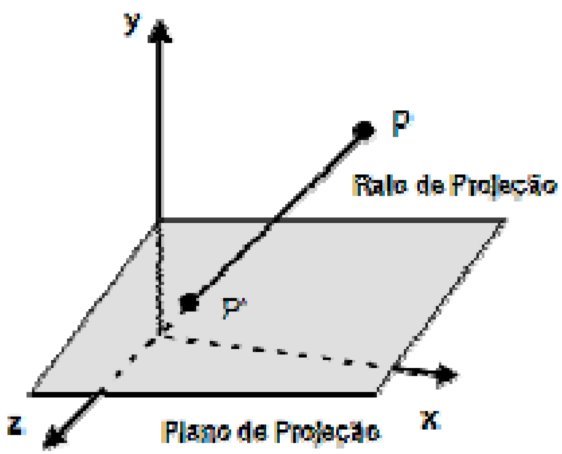
*A teoria de projeções é bem genérica. Permite representar **o objeto** em **qualquer superfície mesmo não plana.*** **E fazer correspondencias entre os pontos do objeto do espaço e os pontos do objeto projetados nas superfícies**



Projeções planas:

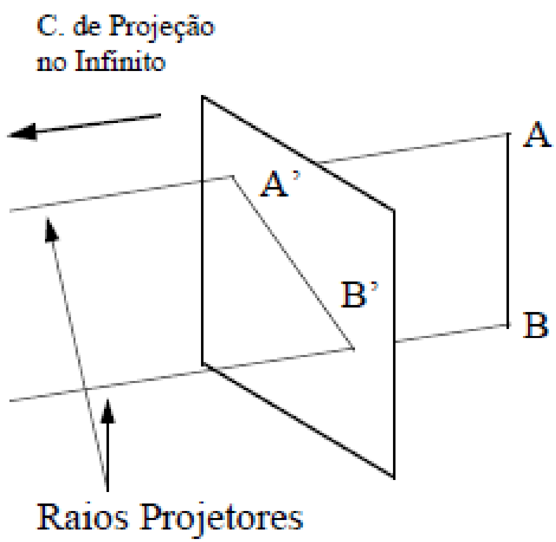
Elementos básicos:

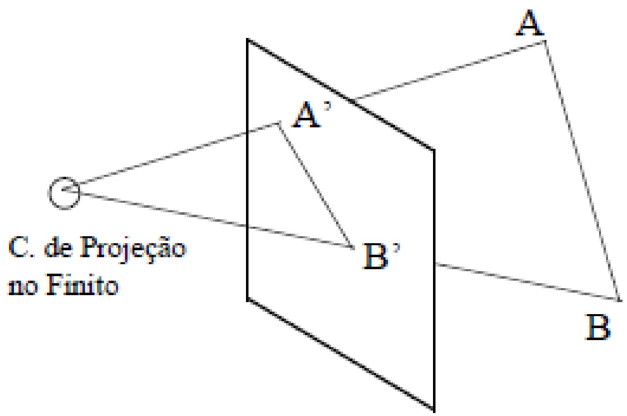
- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.



Classificação BÁSICA:

- Projeções paralelas e projeções perspectivas





Cada tipo de projeção

Tem casos de aplicação específicos nos quais são bem úteis.

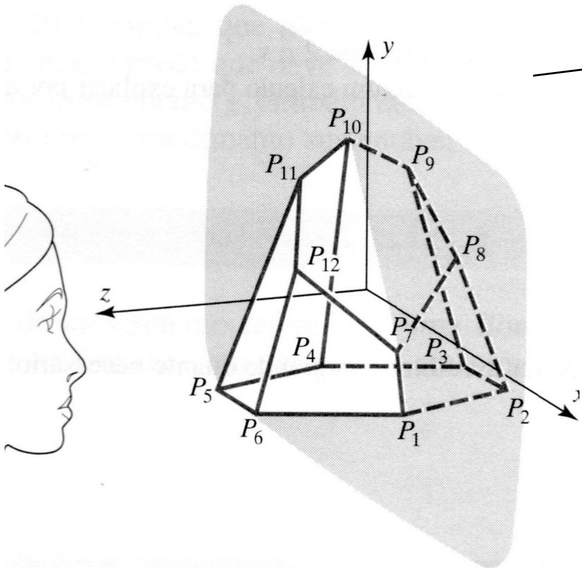
E elas serão também definidas e implementadas como **matrizes**.

Embora essa operação **não tem inversa** tem unicidade !!!

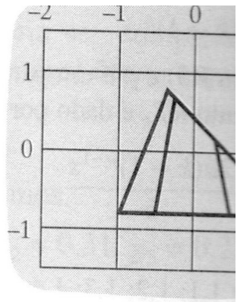
Lembra do espaço 3D ?

A forma mais simples de representar um objeto 3D em 2D é simplesmente Descartar uma das suas coordenadas .

Que matriz varia isso *?*

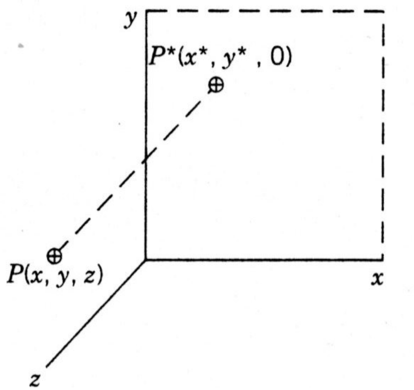


P_1 : (1,000; – 0,800; 0,000), P_2 : (0,500; – 0,800; – 0,866),
P_3 : (– 0,500; – 0,800; – 0,866), P_4 : (– 1,000; – 0,800; 0,000),
P_5 : (– 0,500; – 0,800; 0,866), P_6 : (0,500; – 0,800; 0,866),
P_7 : (0,840; – 0,400; 0,000), P_8 : (0,315; 0,125; – 0,546),
P_9 : (– 0,210; 0,650; – 0,364), P_{10} : (– 0,360; 0,800; 0,000),
P_{11} : (– 0,210; 0,650; 0,364), P_{12} : (0,315; 0,125; 0,546)



Acertou!!
Foi o que fizemos para desenhar os objetos esta aula até aqui!

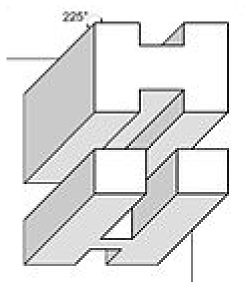
$$[x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

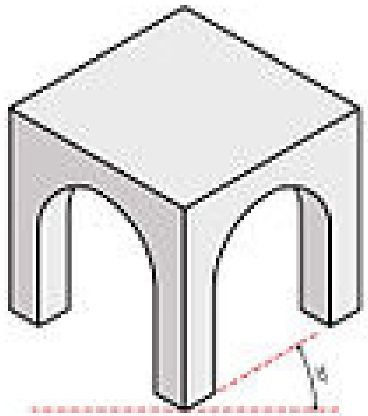


Essa é a chamada Projeção paralela ORTOGRAFICA OU VISTA no plano xy

Características e classificações:

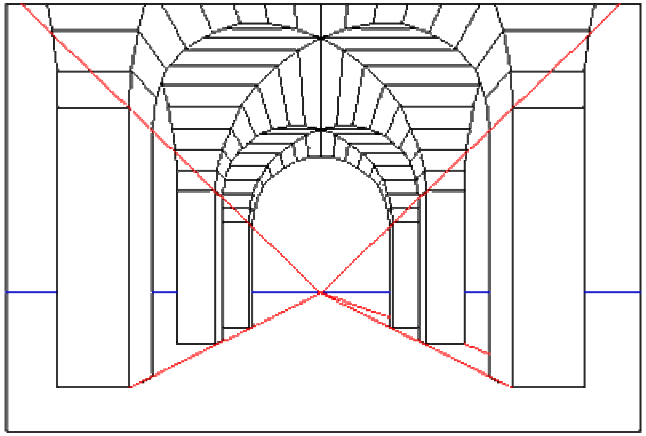
- Projeções Paralelas
  - O centro de projeção é localizado no infinito
  - Todas as linhas de projeção são paralelas entre si;
  - São tradicionalmente usadas em engenharia e desenhos técnicos;
  - Em alguns casos preservam as dimensões do objeto;
  - Não produzem imagem realista.



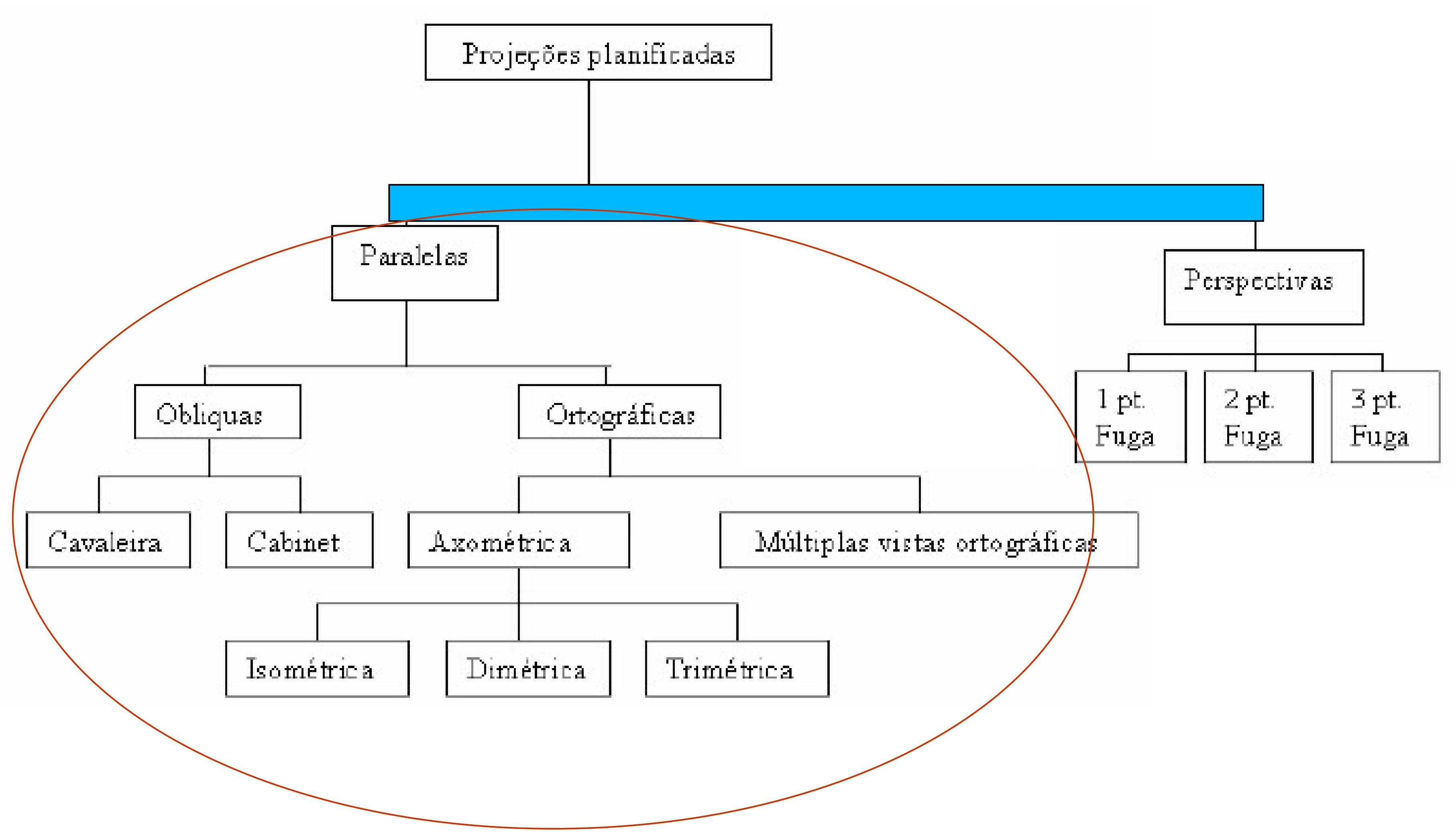


Características cont.

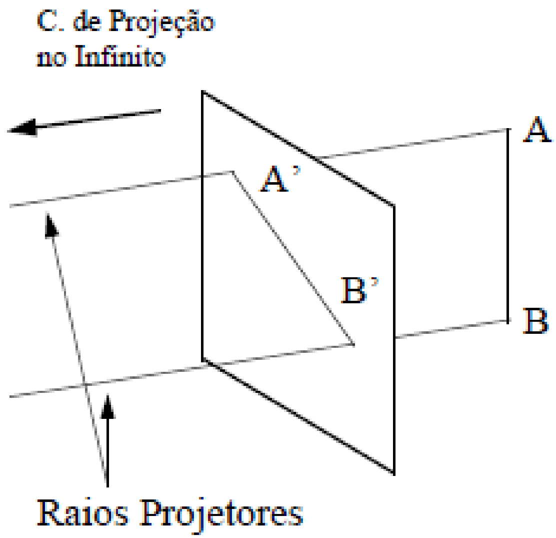
- Projeções Perspectivas
  - Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
  - Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
  - Os raios projetores não podem ser paralelos.
  - Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
  - São mais realísticas na representação de objetos;
  - Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;

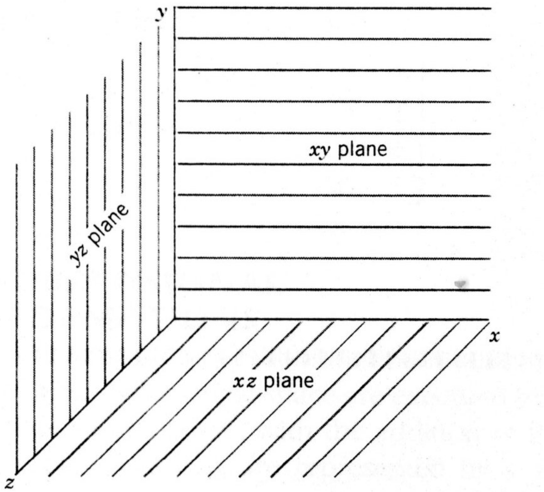


Classificações:

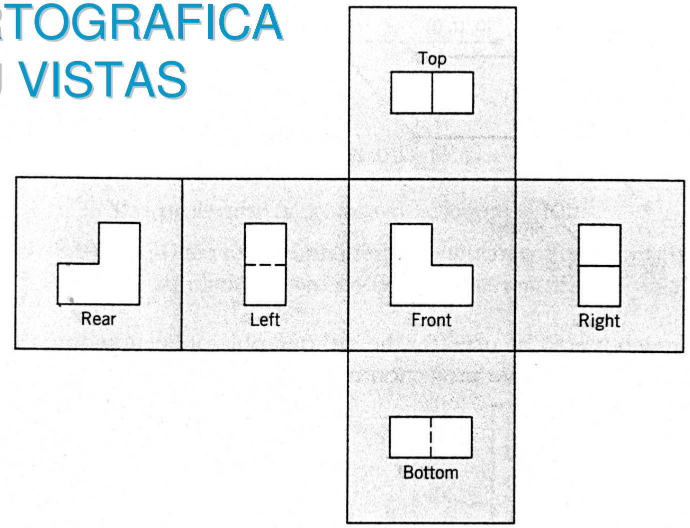


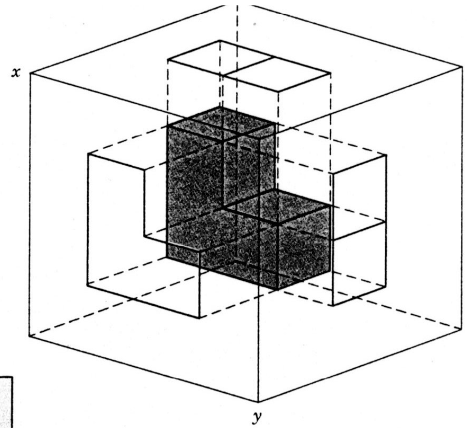
Projeções paralelas





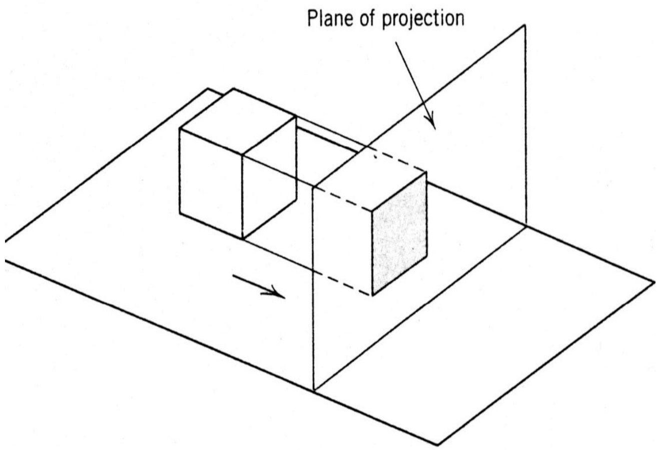
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
OU VISTAS



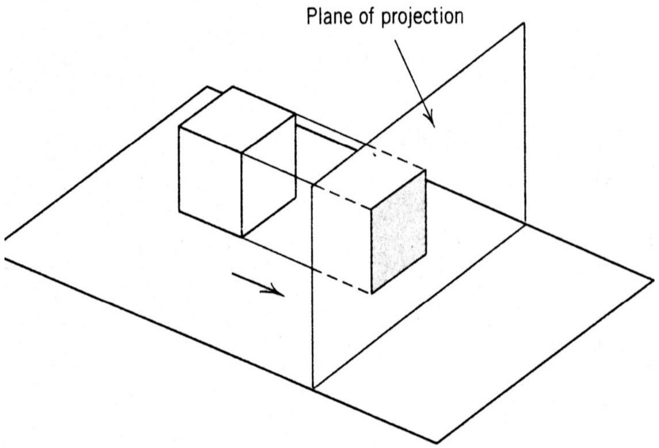


objeto escadinha

Projeção paralela ORTOGRAFICA
no PLANO z=0 (só restam coordenadas
x,y dos pontos) :



Projeção paralela
ORTOGRAFICA
OU VISTAS



$$[x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

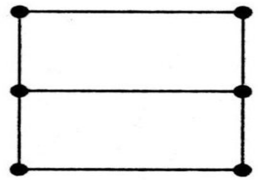
$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

Projeção paralela ORTOGRAFICA
no PLANO z=0 (só restam x,y) :

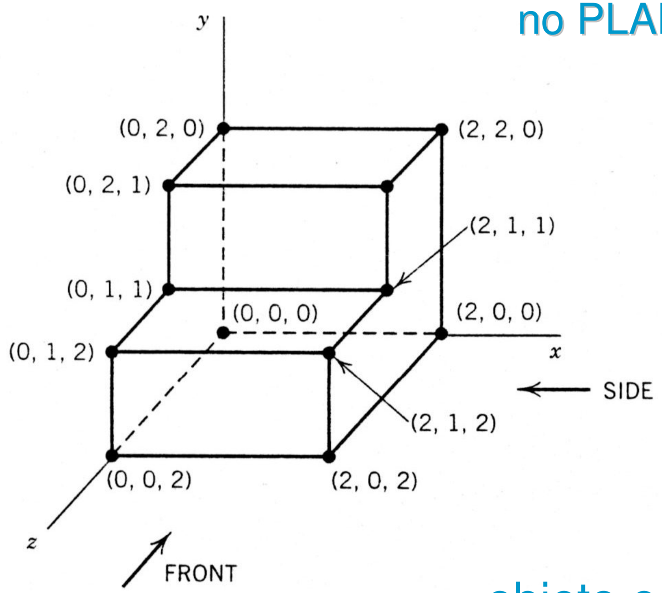
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(só restam x e y)

$$[P^*]_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Projeção paralela
ORTOGRAFICA
no PLANO z=0:

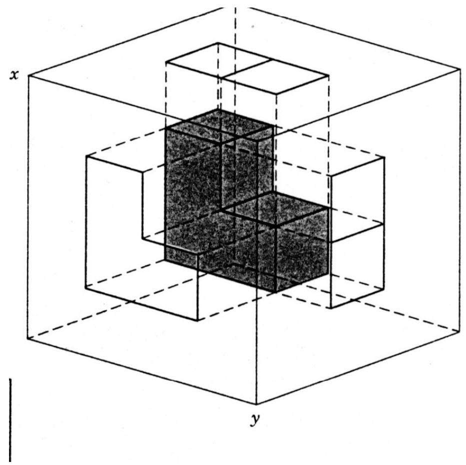


objeto escadinha

E SE TIVERMOS Projeção paralela
ORTOGRAFICA POR UM PLANO PARALELO A
z=0, podemos pegar e aplicar uma translação.
z=Tz como fica essa matriz ?

De mesma forma

- Você pode descobrir as matrizes que fazem as outras vistas !!
- E projetar nestes planos seus objetos

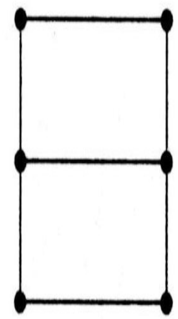


objeto escadinha

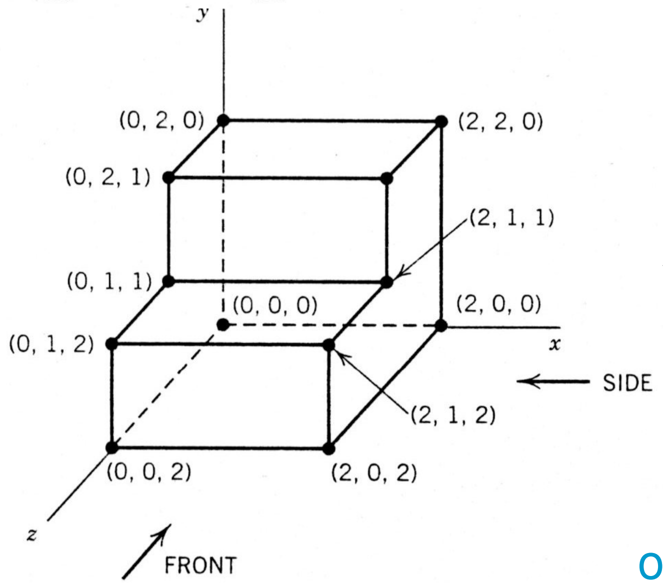
Projeção paralela ORTOGRÁFICA no PLANO y=0:

$$
[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

(só restam x,z)



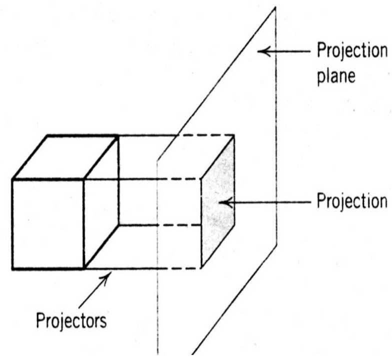
Todo y=0:



objeto escadinha

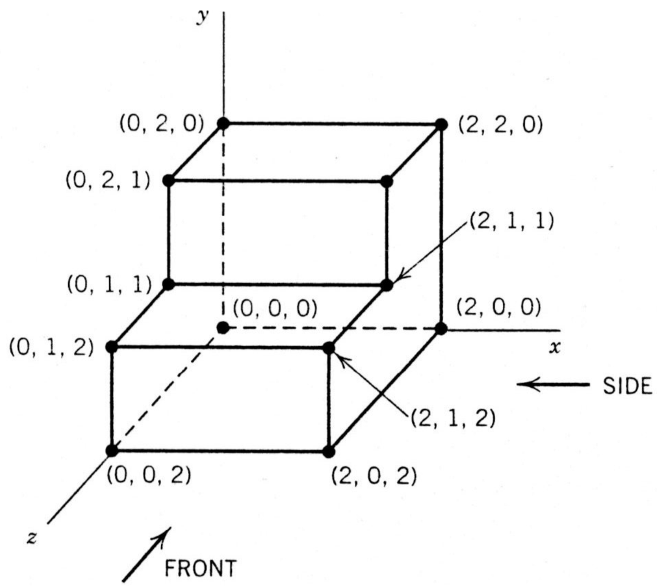
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E SE TIVERMOS
Projeção paralela
ORTOGRAFICA
POR UM PLANO
PARALELO A x=0, i.e.
x=Tx ?

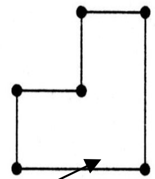


(só restam y,z)

Projeção paralela
ORTOGRAFICA
no PLANO x=0:



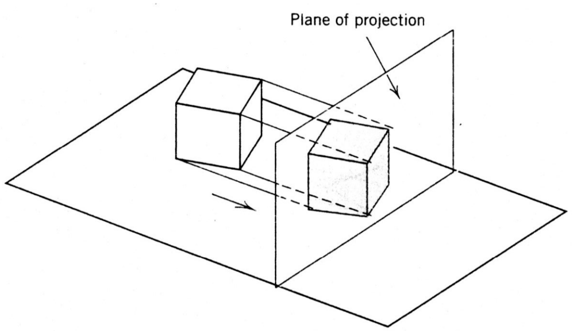
$$[P^*]_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

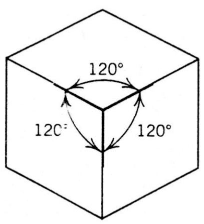


objeto escadinha

Projeção paralela ORTOGRAFICA axonométrica

- Raios projetores **paralelos** mas não na mesma direção dos eixos principais do objeto, e **perpendiculares** ao plano de projeção :
- Orientação qualquer: **TRIMÉTRICA**
- De forma que **2 eixos tenha a mesma métrica**: **DIMÉTRICA**
- Os **3 eixos tenha a mesma métrica**: **ISOMÉTRICA**



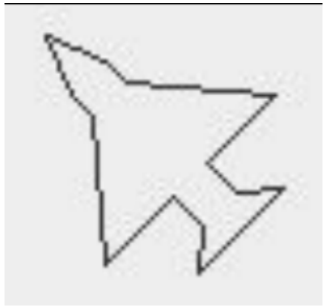


Segunda parte do trabalho 1

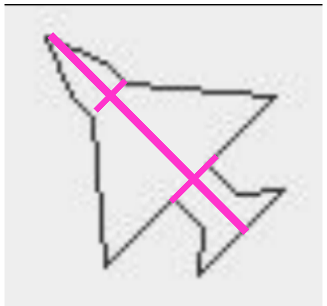
- **Entrega: 16/05/2019 - quinta**
- **Desenhar a figura 3D do seu grupo como *wire-frame* em projeção isométrica na tela inicial de abertura do seu teste de QI**
- **E corrigir detalhes de cores e outras coisas que ficaram para melhorar no seu trabalho**

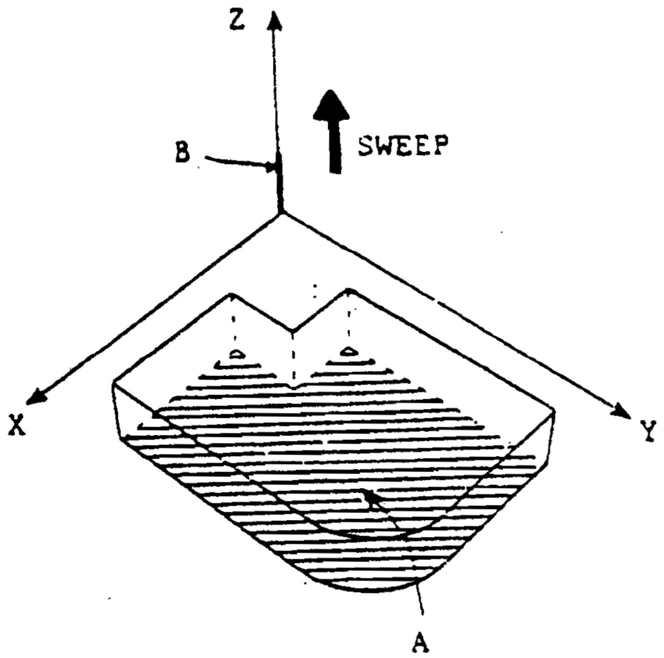
Como ela vai virar 3D?

- Uma das formas mais simples e separar as duas faces antes iguais.
- Por exemplo a figura do grupo
- João Matheus, Marcos Victor Ennes, Hiaggo Machado e William Martins.



A face da frente a de verso antes tinham Coordenadas x,y e z iguais. Faça elas agora terem coordenadas z diferentes.
Por exemplo z=0 e z=1
Crie agora diversas novas arestas paralelas ao eixo z e novas faces.

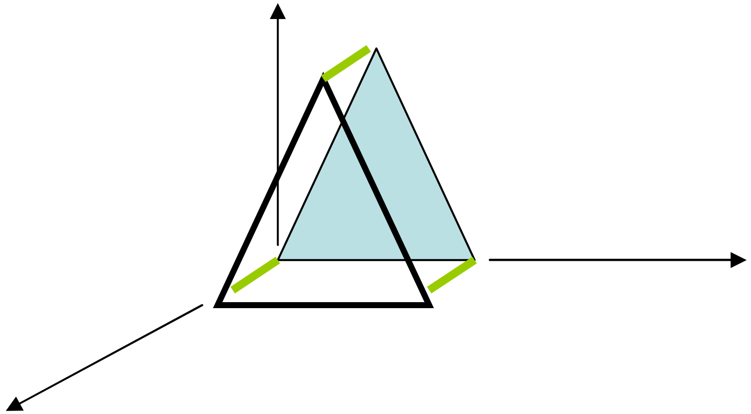




Translational sweeping.

Depois se você quiser mais perfeição pode dividir ainda mais uma das faces não deixando todos os elementos da mesma com igual coordenada z e criando ainda mais faces, arestas e vértices.

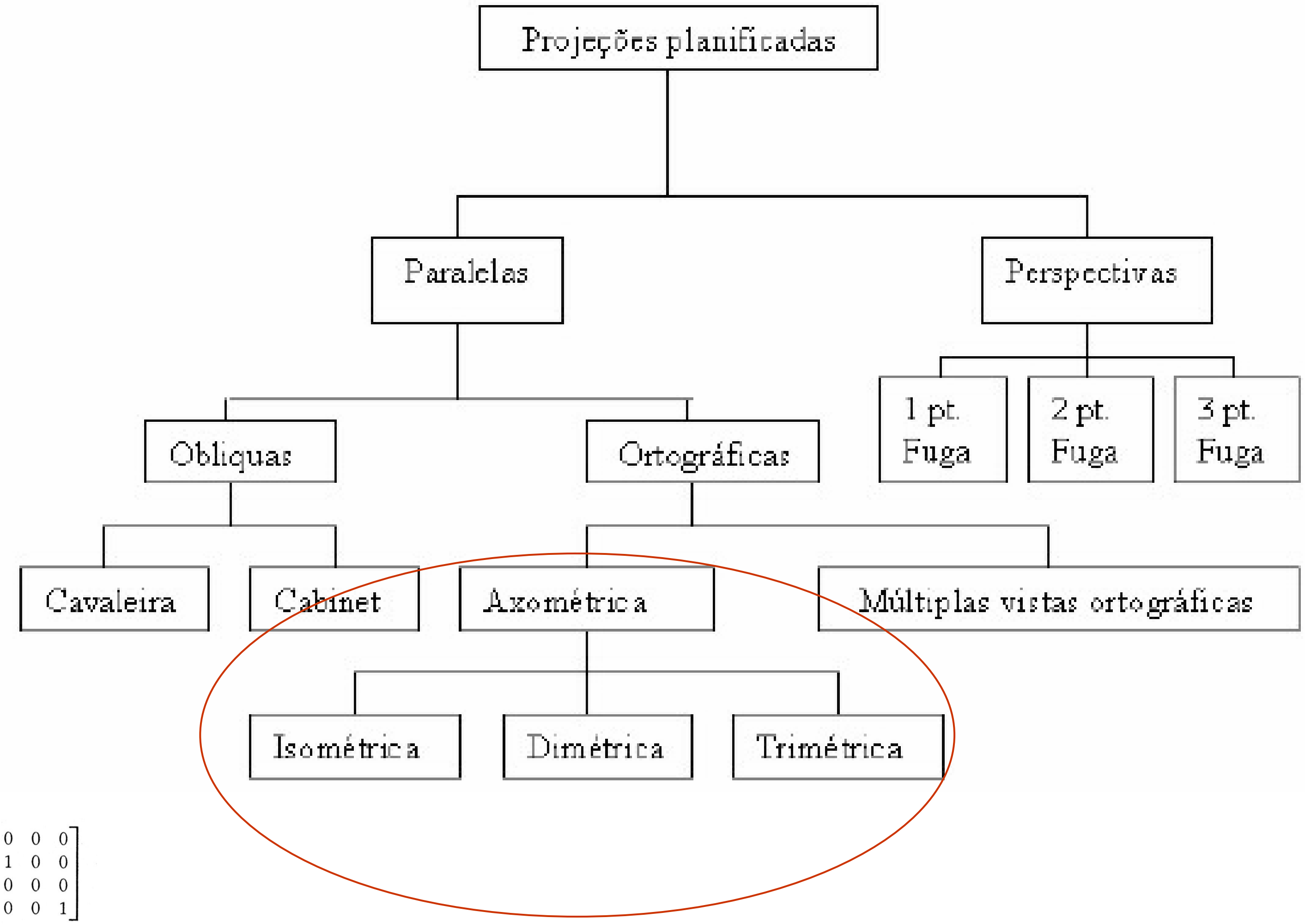
Considerando a Figura



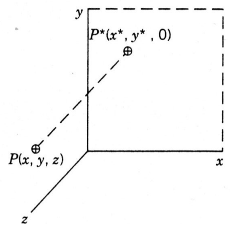
A face da frente a de verso antes tinham
Coordenadas x,y e z iguais.
Agora elas tem coordenadas z diferentes.

Novas arestas paralelas ao eixo z ,
e novas faces foram criadas

Vértice	1	2	3	4	5	6
x	0	60	30	0	60	30
y	0	0	60	0	0	60
z	0	0	0	10	10	10

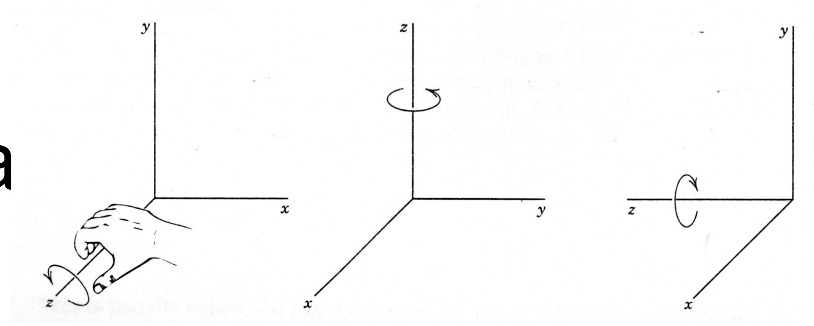


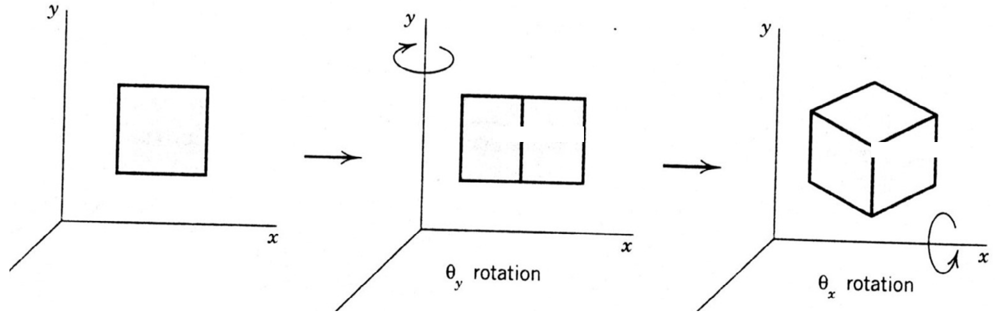
$$[x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

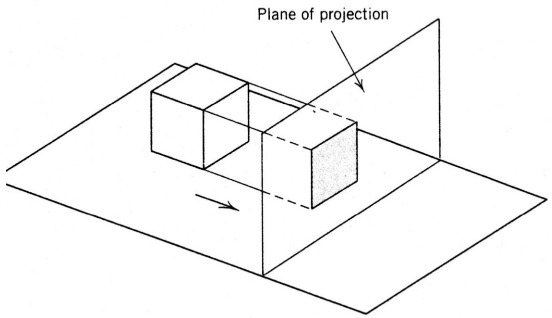


Projeção paralela isométrica

- Vamos **reposicionar** nosso cubo inicial!







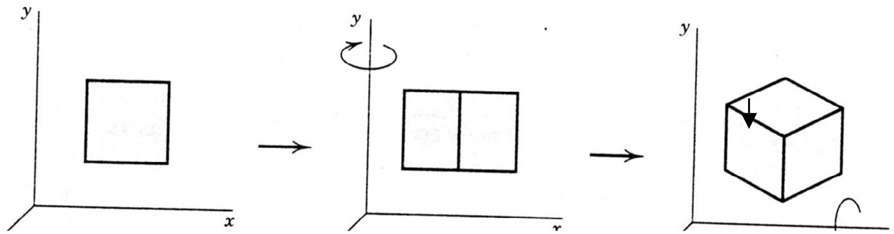
$$[M_{TILT}] = [T_R]_y^{\theta}[T_R]_x^{\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & -\sin\theta_y\cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela isométrica

- Reposicionar o cubo e
- Depois projetá-lo



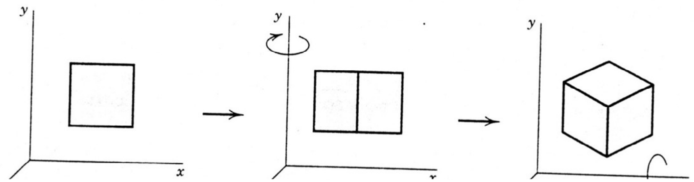
$$[M_{TILT}] = [T_R]_y^{\theta}[T_R]_x^{\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & -\sin\theta_y\cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x\cos\theta_y & \cos\theta_x\cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{ISO}] = [M_{TILT}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x\cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela isométrica



- Os vetores unitários agora são:

$$x^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [\cos\theta_y \quad \sin\theta_y \sin\theta_x \quad 0 \quad 1]$$
$$y^* = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1][M_{ISO}] = [0 \quad \cos\theta_x \quad 0 \quad 1]$$
$$z^* = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1][M_{ISO}] = [\sin\theta_y \quad -\sin\theta_x \cos\theta_y \quad 0 \quad 1]$$

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$
$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$
$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

Os vetores unitários em x e y:

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos: $1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$

Simplificando a expressão: $\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

Projeção paralela isométrica

- Os vetores unitários em

$$|z^*| = |y^*|$$

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y = \cos^2\theta_x$$

Considerando só senos:

$$\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x (1 - \sin^2\theta_y) = 1 - \sin^2\theta_x$$

Simplificando a expressão:

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{1 - 2\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

$$|x^*| = |y^*|$$

$$\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = \cos^2\theta_x$$

$$1 - \sin^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x = 1 - \sin^2\theta_x$$

$$\sin^2\theta_y (\sin^2\theta_x - 1) = -\sin^2\theta_x$$

$$\boxed{\sin^2\theta_y = \frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}}$$

$$\frac{\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x} = \frac{1 - 2\sin^2\theta_x}{1 - \sin^2\theta_x}$$

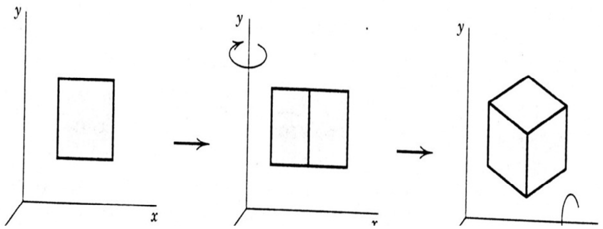
$$\sin^2\theta_x = 1 - 2\sin^2\theta_x$$

$$\boxed{\sin^2\theta_x = \tfrac{1}{3}}$$

$$\boxed{\theta_x = \pm 35.26°}$$

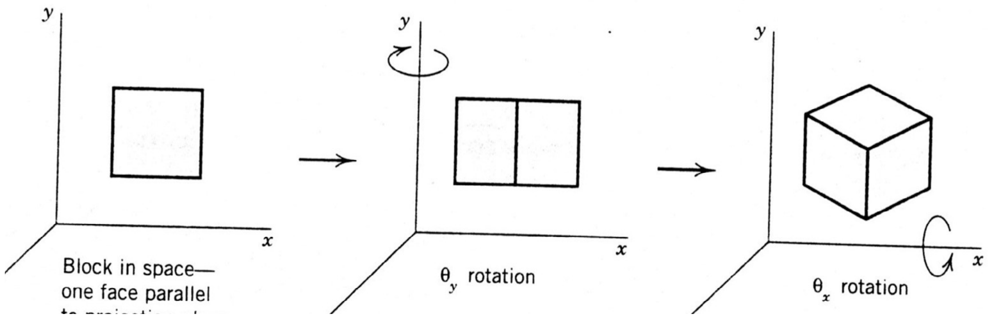
$$\sin^2\theta_y = \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{\theta_y = \pm 45°}$$



Como a figura parece ficar em isométrica?

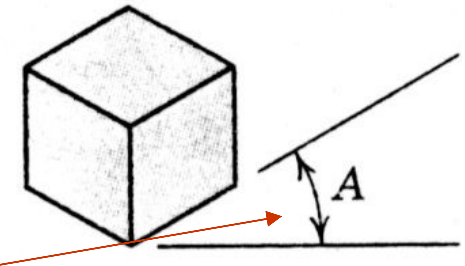
- O antigo eixo horizontal do cubo agora parece fazer um ângulo com a horizontal da tela.



$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- De quanto é esse ângulo?

Projeção paralela isométrica



- Em engenharia e desenho técnico um ângulo importante na projeção isométrica é o chamado ***A*** na figura ao lado (que ângulo é esse?)

- Considerando

$$x^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1][M_{\mathrm{ISO}}] = [\boxed{\cos\theta_y} \quad \boxed{\sin\theta_y \sin\theta_x} \quad 0 \quad 1]$$

Se vê :

$$\tan A = \frac{x_y^*}{x_x^*} = \frac{\boxed{\sin\theta_y \sin\theta_x}}{\boxed{\cos\theta_y}}$$

como

$$\theta_y = 45°, \sin\theta_y = \cos\theta_y,$$

Tem-se que:

$$\tan A = \pm\sin\theta_x = \pm\sin(35.26)°$$

$$A = \pm 30°$$

Projeção paralela isométrica

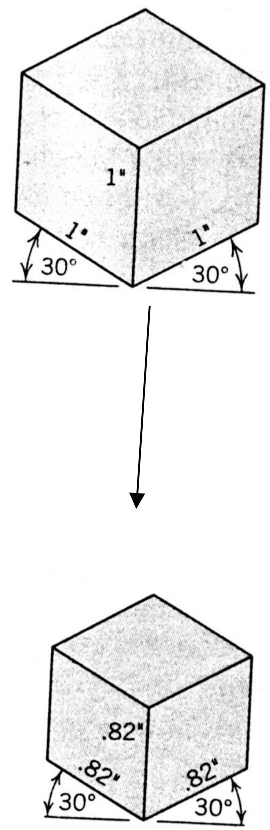
- Em engenharia e desenho técnico, saber o quanto muda o comprimento na projeção isométrica é importante:
- Vamos chamar o novo comprimento de ***F***, voltando as medidas dos vetores depois de projetados :

$$|x^*| = \sqrt{\cos^2\theta_y + \sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}$$

$$|y^*| = \sqrt{\cos^2\theta_x}$$

$$|z^*| = \sqrt{\sin^2\theta_y + \sin^2\theta_x \cos^2\theta_y}$$

$$F = \frac{|y^*|}{1} = \sqrt{\cos^2\theta_x} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0.8165$$

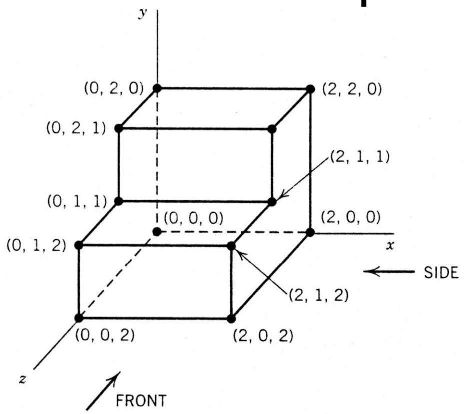


O comprimento na projeção isométrica **muda 82%** !

Projeção paralela isométrica

Como ficaria o objeto escadinha na

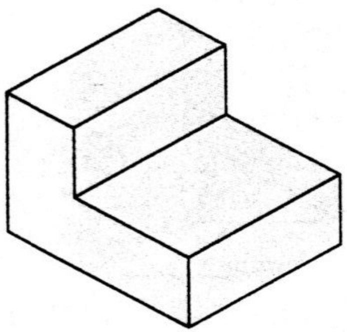
isométrica no plano xy ou z=0?



$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = [P][M_{\text{ISO}}] = [P]\begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y \sin\theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & 0 & 0 \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cos\theta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

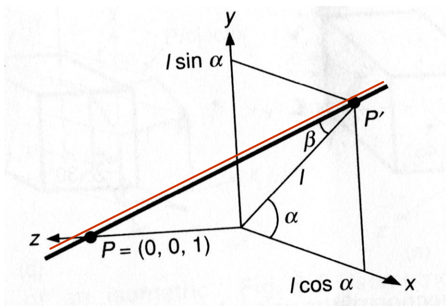
$$[P^*] = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.632 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 2.448 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.121 & 2.040 & 0.0 & 1.0 \\ 2.12 & 1.224 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 2.828 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & -0.816 & 0.0 & 1.0 \\ 1.414 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.707 & 0.408 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

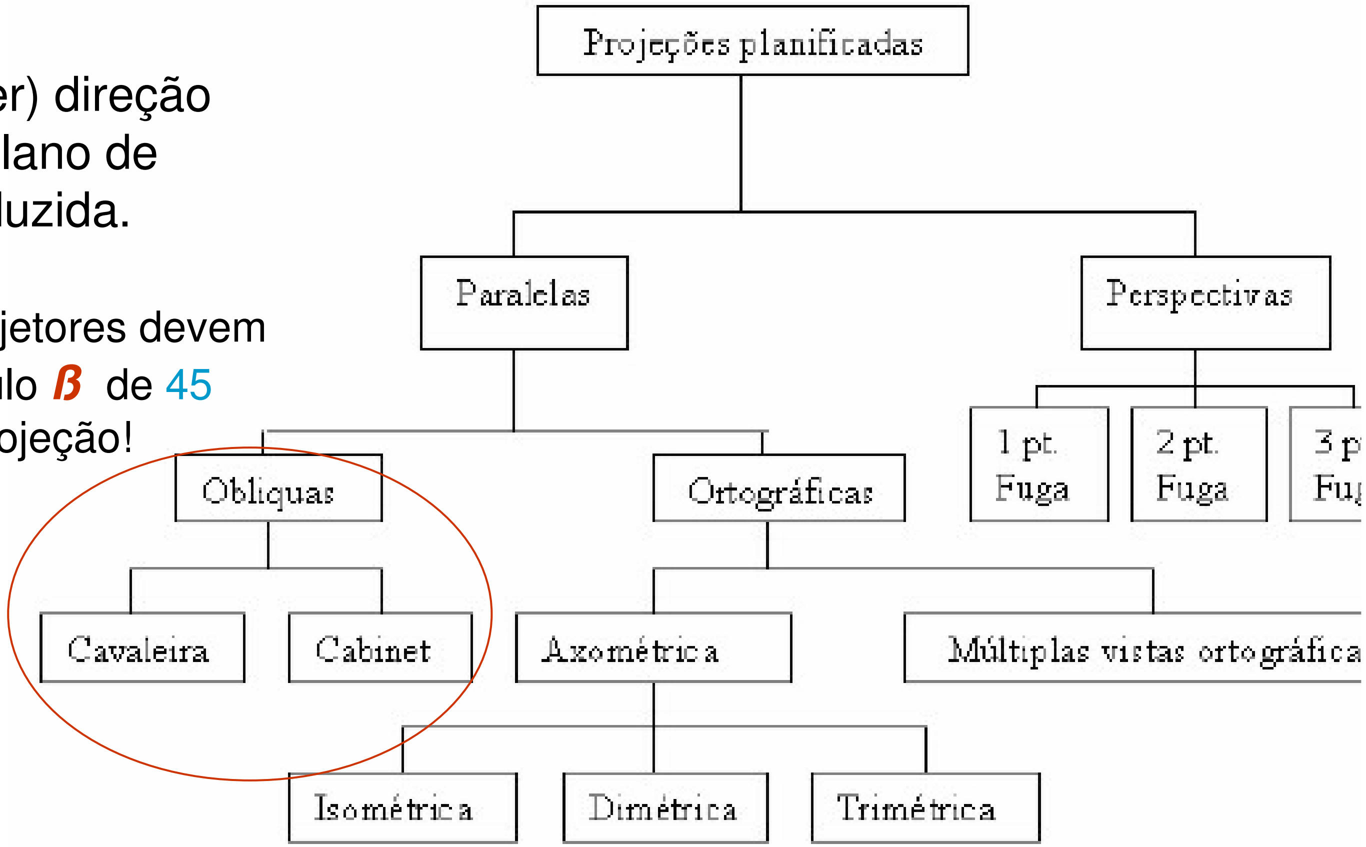


objeto escadinha

Cavaleira (cavalier) direção perpendicular ao plano de projeção não é reduzida.

Ou seja os raios projetores devem chegar com um ângulo ***ß*** de 45 graus no plano de projeção!



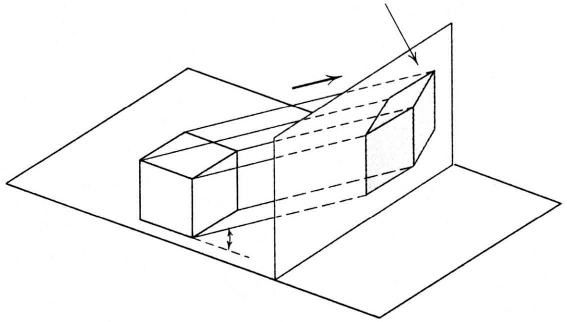


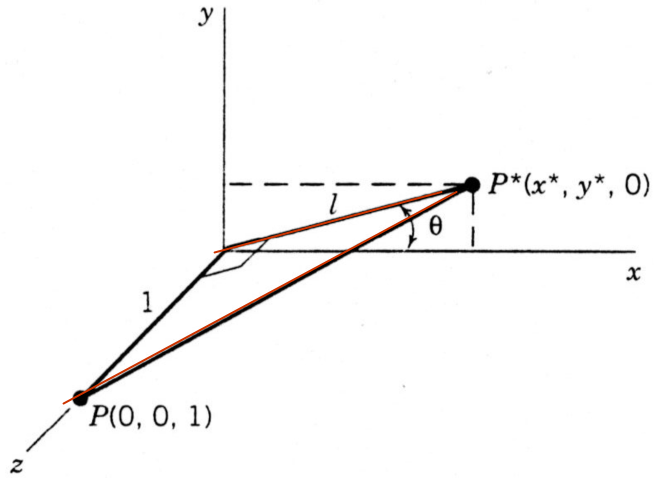
Cabinet direção perpendicular ao plano de projeção é reduzida a metade .

Ou seja os raios projetores devem chegar com um ângulo ***ß*** cuja tangente seja 0,5=1/2! ***ß = 26,5651°***

Projeção paralela oblíqua

- Raios projetores paralelos mas não perpendiculares ao





$$x^* = l \cos \theta$$

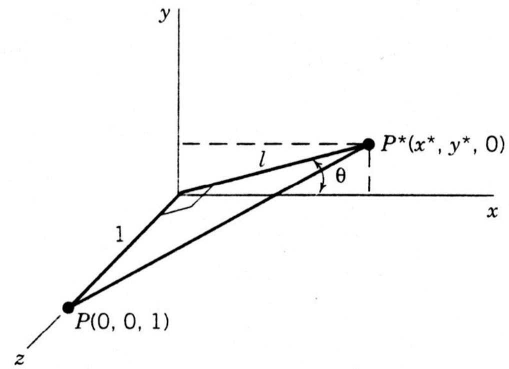
$$y^* = l \sin \theta$$

Geralmente essa é obtida considerando como um vetor unitário é mostrado pela projeção que se deseja fazer.

$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção paralela oblíqua

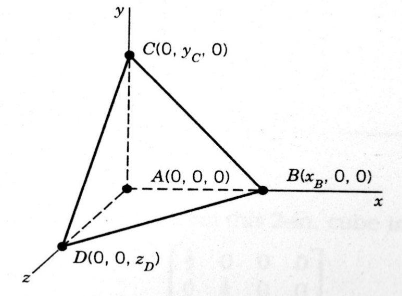
$$x^* = l\cos\theta$$
$$y^* = l\sin\theta$$



Como um tetraedro com os vértices:

$P_1(3,4,0),\ P_2(1,0,4),\ P_3(2,0,5),\ P_4(4,0,3)$

Ficaria?



$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

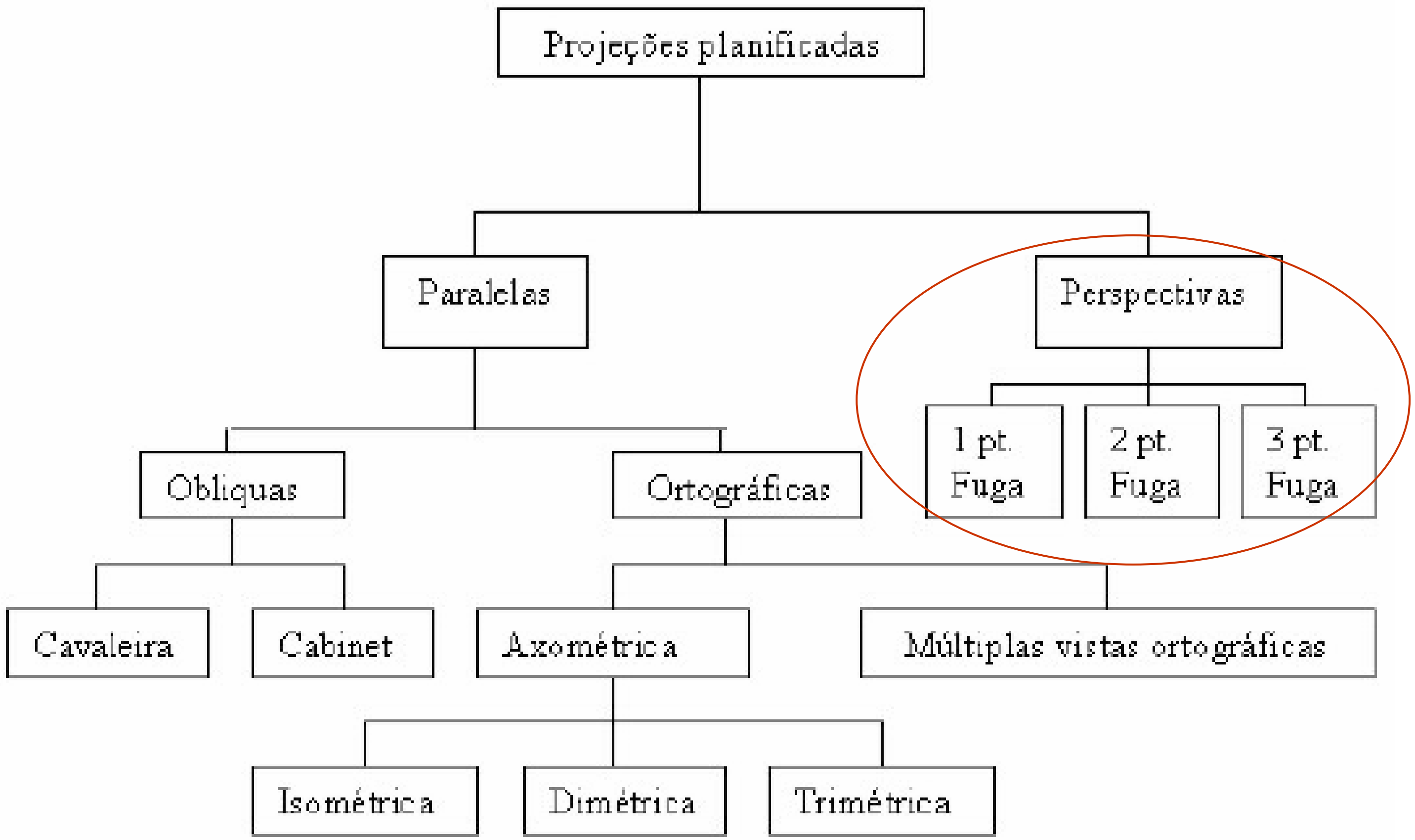
Cavaleira (cavalier) *l* = 1 com θ = 45

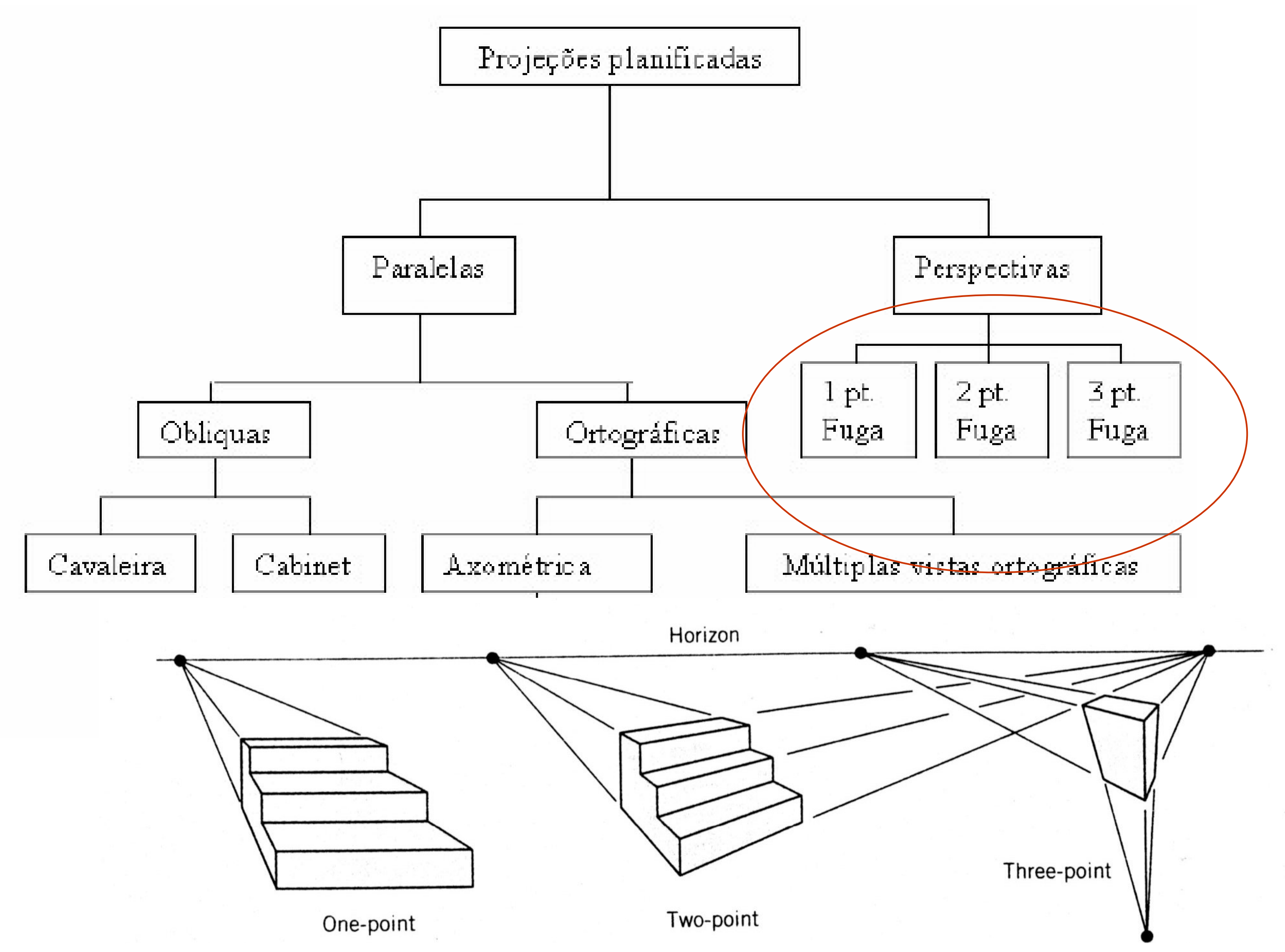
$$[M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- <u>Exemplo:</u>

$$[P^*] = [P][M_{OBL}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3.83 & 2.83 & 0 & 1 \\ 5.54 & 3.54 & 0 & 1 \\ 6.12 & 2.12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

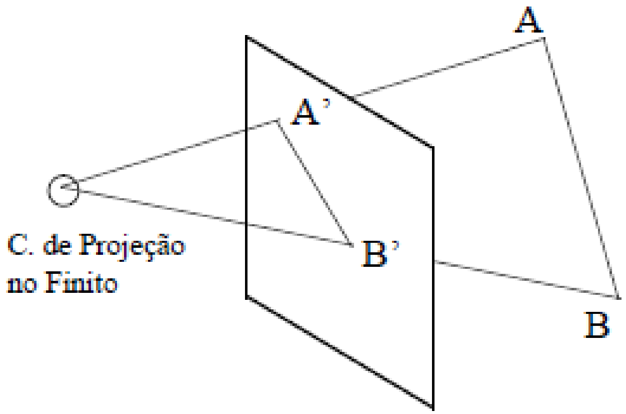

Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Obliquas
Ortográficas
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas
Isométrica
Dimétrica
Trimétrica



objeto escadinha 3

perspectiva

- com 1 ponto de fuga



Raios projetores se encontram no centro de projeção - cp

perspectiva : Raios projetores se encontram no centro de projeção

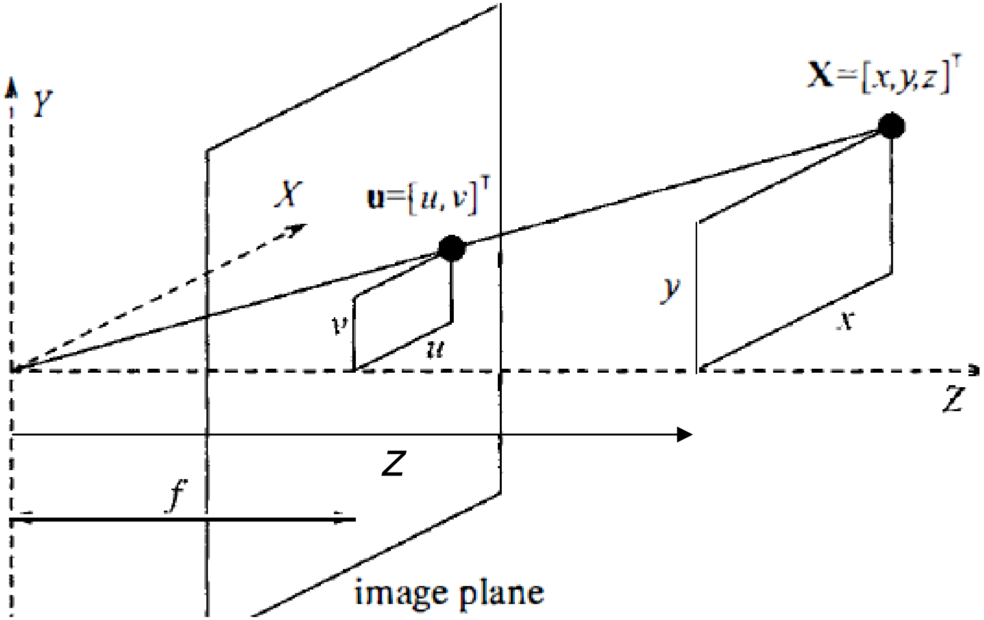
Supondo centro de projeção
Na origem (x_{cp},y_{cp}, z_{cp}) =(0,0,0)

Antes se tinha

$$f \rightarrow \infty.$$

$$z \rightarrow \infty$$

Pois os raios projetores
eram paralelos



Agora por similaridade de triângulos

$$u = \frac{x\,f}{z}, \qquad v = \frac{y\,f}{z}.$$

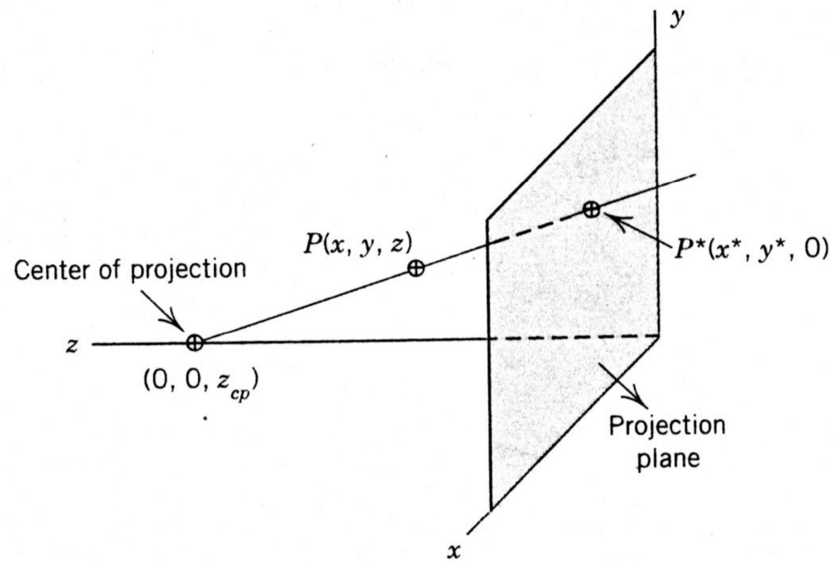
Considerando $P\ (\ x\ ,\ y\ ,\ z\ )$

- Qual sua relação com sua **projeção** no plano ***z*=0** a partir de um **raio projetor no eixo *z***

$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ z_{cp})$?

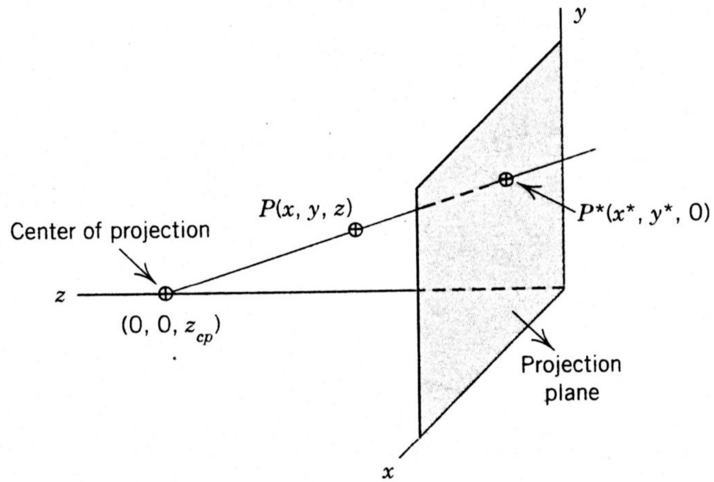
$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$

Supondo centro de projeção no eixo z, Mas fora da origem em (x_{cp},y_{cp}, z_{cp}) =(0,0,Zcp)

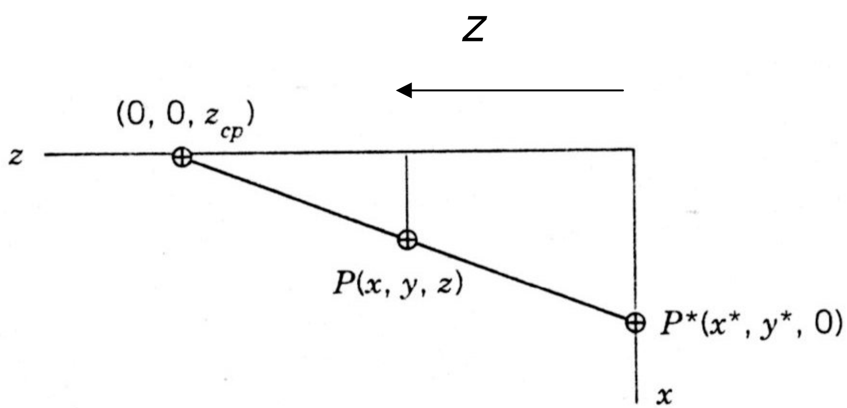


$P\ (\ x\ ,\ y\ ,\ z\ ) \leftrightarrow P^*\ (\ x^*,\ y^*,\ 0\ )$

Considerando plano *z x*,
ou $y = 0$



Por semelhança de triângulos :



$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$

Organizando:

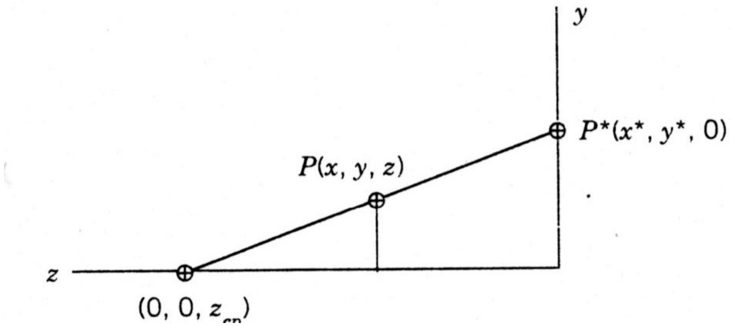
$$x^* = \frac{x}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

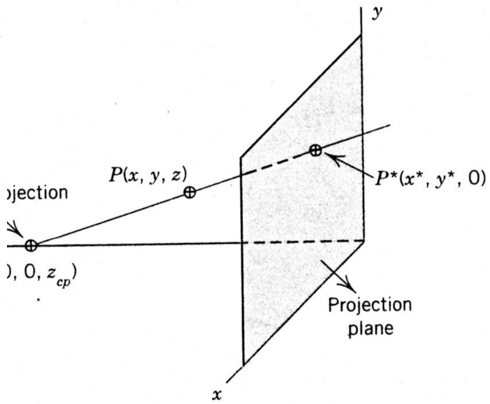
P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Considerando plano

z y ,

ou *x* = 0





- Por semelhança de triângulos :

$$\frac{y^*}{y} = \frac{z_{cp}}{(z_{cp} - z)}$$

Organizando

$$y^* = \frac{y}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Organizando matricialmente:

O que equivale a apena mudar a relação de homogeneidade:

$$P^* = [x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = \left[\frac{x}{\left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)} \quad \frac{y}{\left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)} \quad 0 \quad 1\right]$$

$$= \left[x \quad y \quad 0 \quad \left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)\right]$$

$$= [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz perspectiva para o **centro** de projeção sobre o eixo *z*

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode ser vista como a concatenação de uma **perspectiva** e uma **projeção ortográfica no plano *z* = 0**

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective transformation}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{orthographic projection}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective projection}}$$

Exemplo:

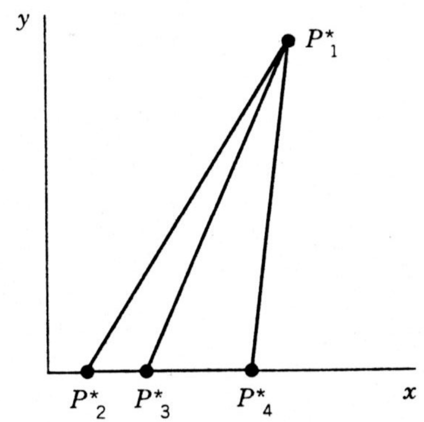
- Como um **tetraedro** com os vértices:

$P_1(3,4,0),\ P_2(1,0,4),\ P_3(2,0,5),\ P_4(4,0,3)$

- Ficaria SE (0 , 0 , $z_{cp}= -5$) ?

$$[P^*] = [P][M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ \frac{5}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Repare que essa matriz colocou valores ≠0 em uma nova área da

nossa matriz de transformação em coordenadas homogêneas !

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

- Se com o centro de projeção sobre o eixo z, tivemos valor ≠0 na terceira linha..... Então......
- Para uma projeção **sobre o eixo *x***, ou com centro de projeção em (x_{cp} , 0, 0)

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para uma projeção sobre o eixo y, ou com centro de projeção em (0, y_{cp} , 0)

- Resumindo perspectivas com 1 centro de projeção

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sobre:

$$x \text{ axis: } [M_{PER}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y \text{ axis: } [M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E sobre z:

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 2 centros de projeção:

- É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 2-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elas podem ser consideradas como a concatenação de duas com

1 centro de projeção ! ! !

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 3 centros de projeção:

- É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 3-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembre que mesmo quando usávamos 2 x 2 e a forma transposta

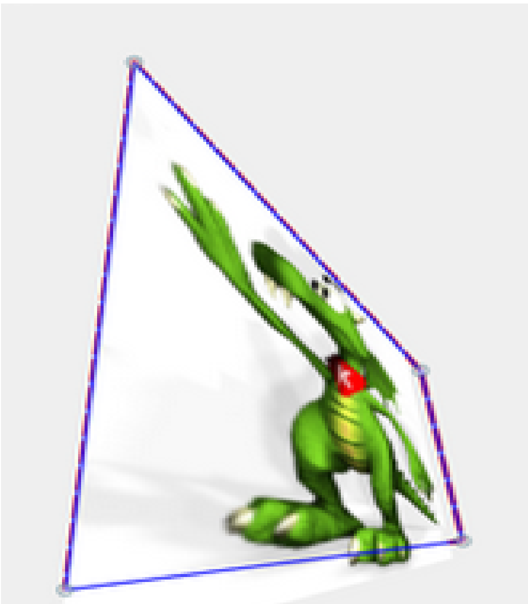
- (pós multiplicando o ponto a ser transformado)

- Já tínhamos visto isso?

- (quando imaginávamos o que faria a parte que ainda não estávamos usando da matriz de transformação ! ! !)

Transformação Perspectiva

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy+1 \end{pmatrix}$$



(10,10)
(100,10)
(100,100)
(10,100)

p=0,2 e q = 0,1
(x,y,1) - > (x,y,px+qy+1)

(10/4,10/4) = (2,5 ; 2,5)
(100/22,10/22)=(4,5 ; 0,5)
(100/31,100/31)= (3,2 ; 3,2)
(10/13,100/13)= (0,7 ; 7,7)

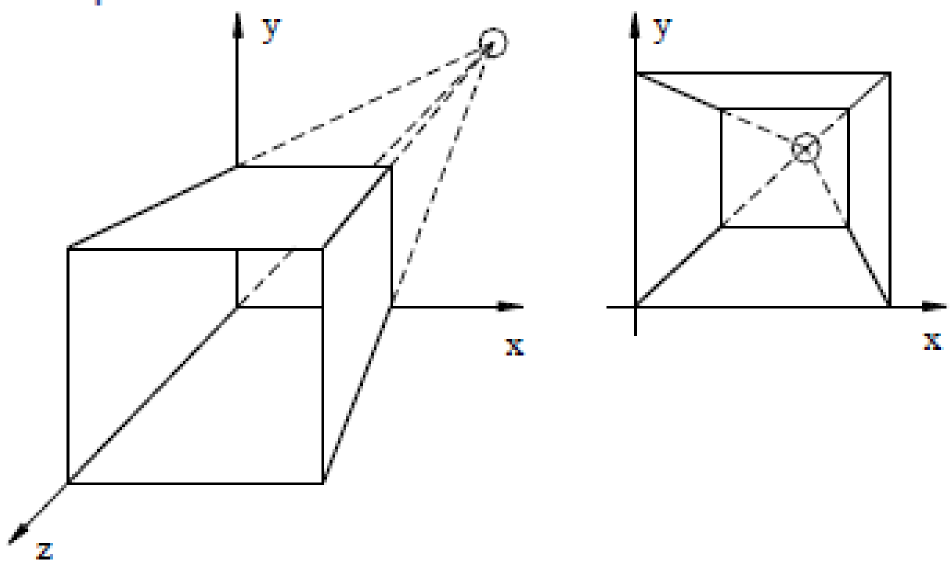
Efeito em um ponto no infinito

(pedindo desculpa aos matemáticos pela notação!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.

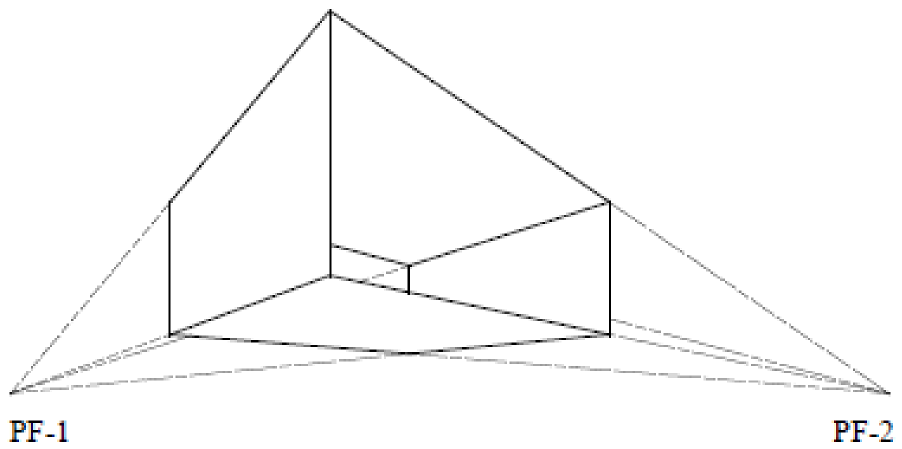


O que são eixos principais?

- Maior e menor momento de inércia.
- Não há produto de inércia para os eixos principais
- Podem ser entendidos como os do menor BoundingBox (BB) possível para o objeto de interesse.

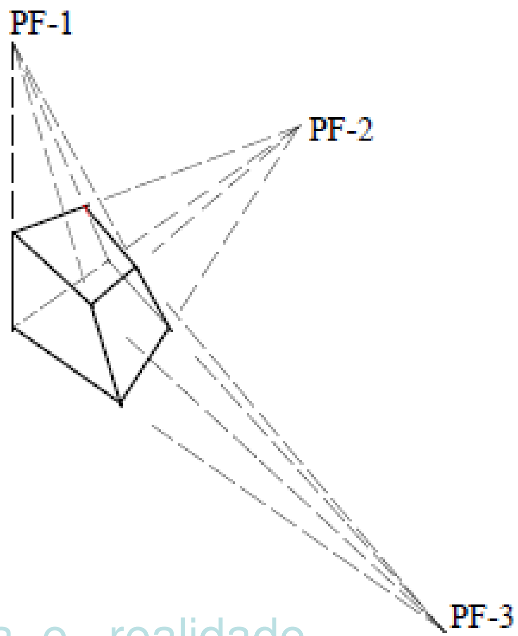
Pontos de fuga principais

- Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



não muito é realista

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



3 pontos de fuga e realidade

Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva *M* do R^3 é uma transformação linear do R^4.
- A matriz 4 x 4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto *P* do espaço afim é levado no hiperplano $w = r\,z + 1$
- Se $z = -1/r$, então *P* é levado em um ponto no infinito.
- Pontos do espaço afim com $z = 0$ não são afetados.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto no “infinito” na direção z, tem coordenadas $[0, 0, 1/r, 1]$
  - Este é o ponto de fuga principal da direção z.
  - Veja que o semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

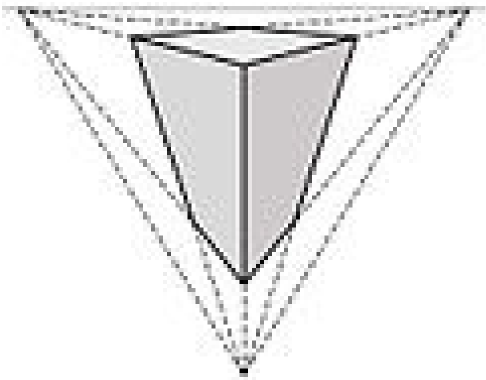
Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:
  - $[-1/p, 0, 0, 1]$
  - $[0, -1/q, 0, 1]$
  - $[0, 0, -1/r, 1]$
- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
  - rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
  - transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

Projetar Sempre Acarreta Perder Informação



http://isgg.net

International Society for Geometry and Graphics

ISGG

Referências

- E. Azevedo, A. Conci, C. Vasconcelos Computação Gráfica: teoria e prática, Elsevier; 2018 - Rio de Janeiro.
- Vera B. Anand, Computer Graphics and Geometric Modeling, John-Wiley,1993. BCTC/UFF - 006.6 A533 1993