http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html

Sistemas de coordenadas
Transformação entre sistemas

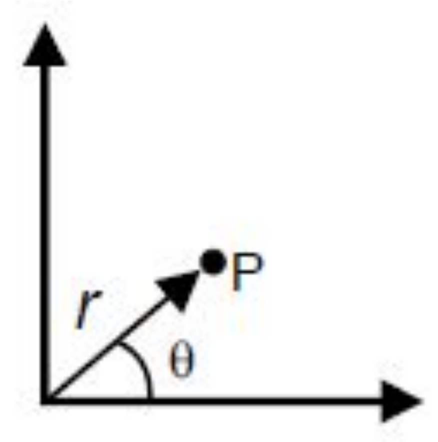
2019-1

Sistemas de Coordenadas

- Referência sobre o tamanho e a posição dos objetos na área de trabalho;
- Existem diferentes sistemas de coordenadas para descrever os objetos.

Sistemas de Coordenadas

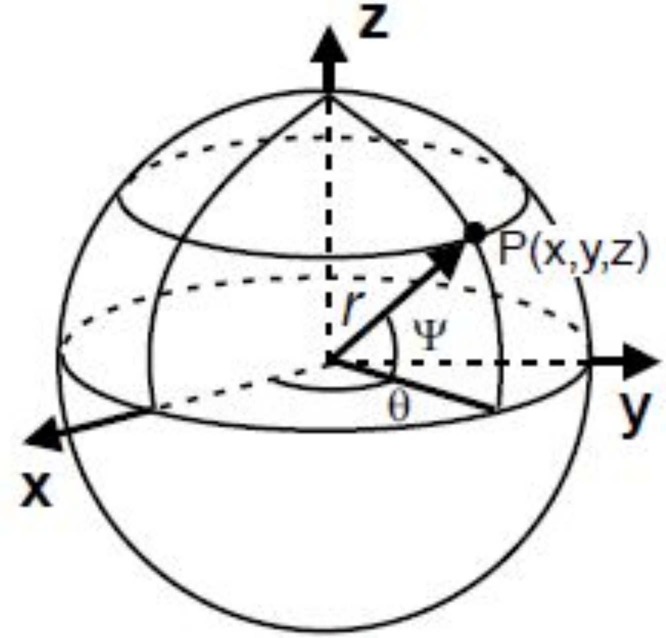
- Coordenadas Polares
  - Medidas por um raio e um ângulo (r, θ);



Coordenadas Polares

Sistemas de Coordenadas

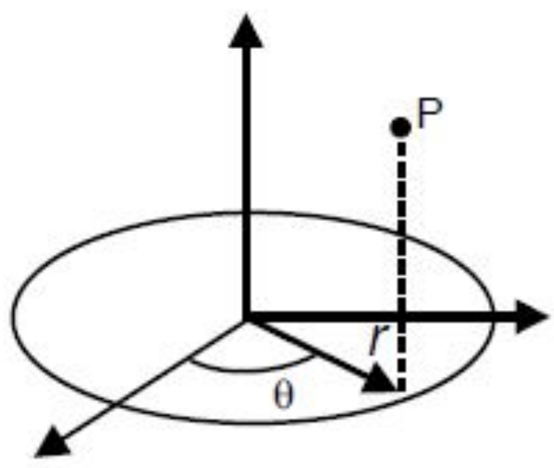
- Coordenadas Esféricas
  - Descritas por raio e dois ângulos (r, θ, ß);



Coordenadas Esféricas

Sistemas de Coordenadas

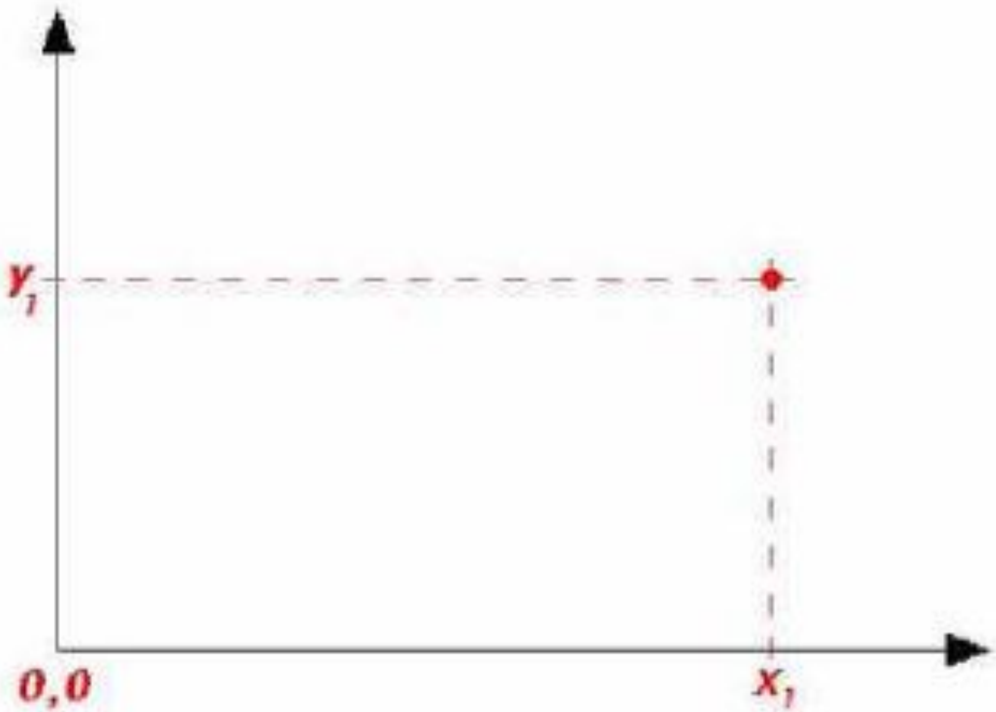
- Coordenadas cilíndricas
  - As coordenadas são descritas por raio, ângulo e comprimento (r, θ, c);



Coordenadas Cilíndricas

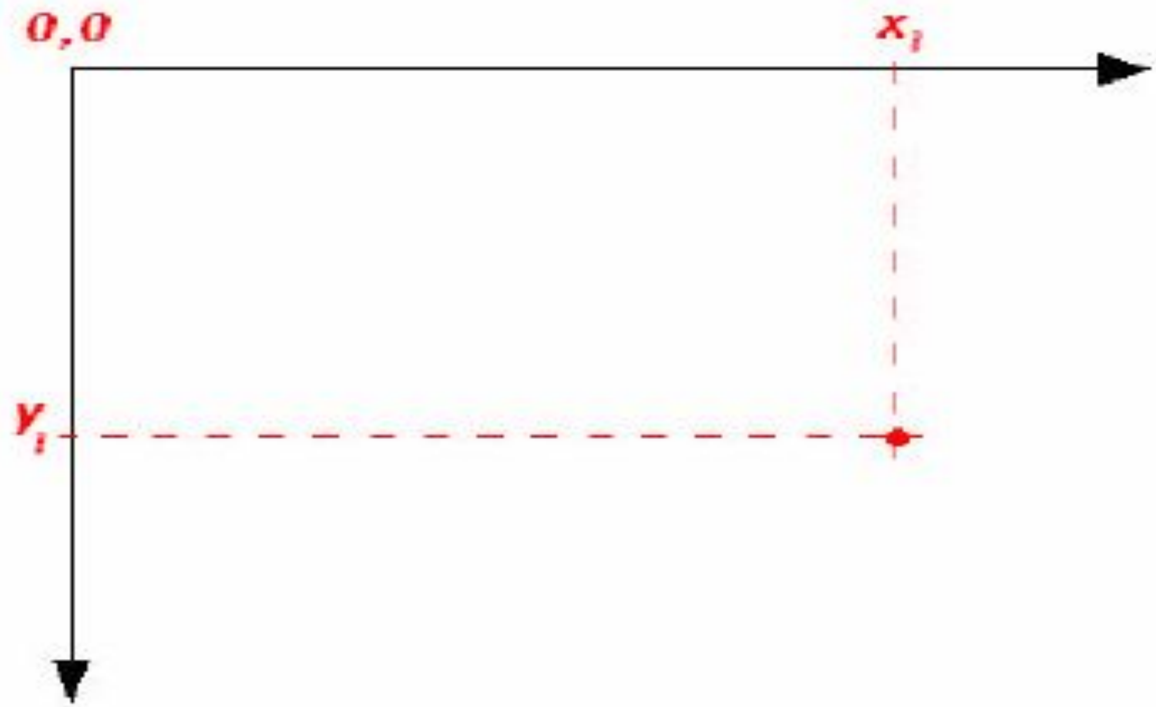
Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas Cartesianas Bidimensionais
  - Descritas por comprimento e largura;



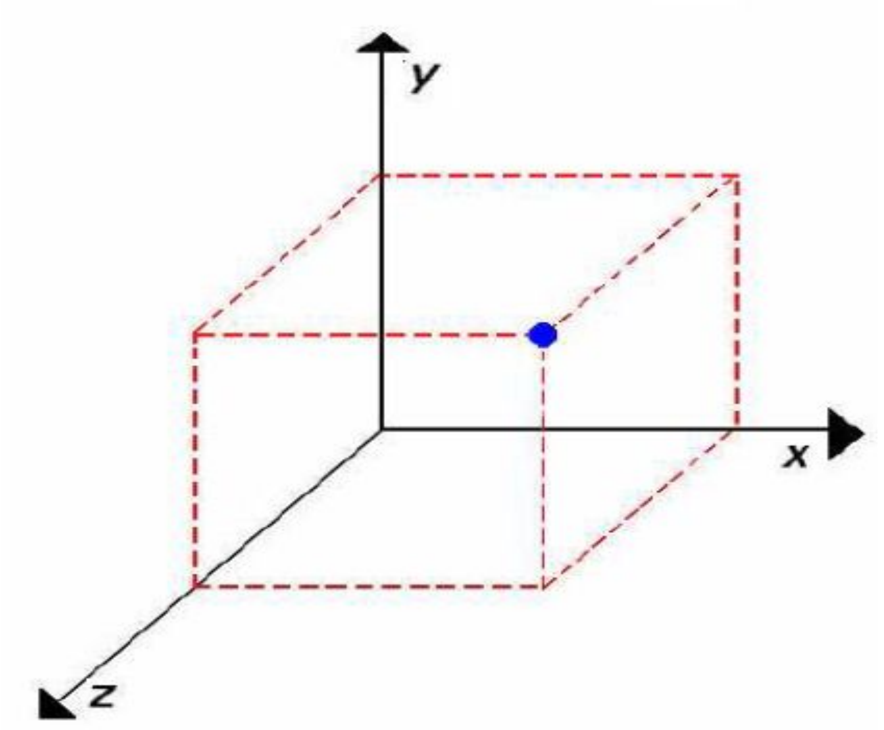
Sistemas de Coordenadas

- Monitores utilizam coordenadas cartesianas bidimensionais
  - Orientação contrária no eixo Y.



Sistemas de Coordenadas

- Coordenadas Cartesianas Tridimensionais
  - Descritas por comprimento, largura e profundidade;



Sistemas de Coordenadas

- Renderização de cenas 3D usam diferentes sistemas de coordenadas
  - Sistema de Coordenadas do Objeto
  - Sistema de Coordenadas do Mundo ou Universo
  - Sistema de Coordenadas de Normalizado
  - Sistema de Coordenadas do Dispositivo
  - Sistema de Coordenadas da Câmera

Sistemas de Coordenadas

- Sistemas de referência da pipeline gráfica:
- Cenas 3D são decompostas internamente como uma sequência de tarefas com o objetivo de produzir uma imagem 2D, partindo da definição de objetos que compõe e caracterizam a cena 3D.

Sistemas de Referência

- Um sistema de coordenada que serve para alguma finalidade específica;
- Aspectos a serem observados em sua definição:
  - Unidade de referência básica;
  - Limites extremos dos valores aceitos para descrever os objetos.

Sistemas de Referência

- Exemplo: sistemas de coordenada para descrever:
  - Elemento da cena
  - Referencia a posição da câmera em relação a objetos.

Sistemas de Referência

- Alguns sistemas recebem denominação especial:
  - Sistema de Referência do Universo – SRU;
  - Sistema de Referência do Objeto – SRO;
  - Sistema de Referência Normalizado – SRN;
  - Sistema de Referência do Dispositivo – SRD;

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Universo – SRU
  - Descreve os objetos em termos das coordenadas utilizadas pelo usuário em determinada aplicação;

Sistema de Referência do Universo - SRU

- Cada usuário especifica o seu universo de trabalho:
  - Sistemas CADD de arquitetura: O universo será em metros ou centímetros;
  - Sistemas CADD de mecânica: O universo será em milímetros ou nanômetros;

O que é o software CAD?

CAD, ou projeto e desenho auxiliados por computador (CADD), é o uso de tecnologia para projetar e documentar projetos. O software CAD substitui o rascunho manual por um processo automatizado.

Sistema de Referência do Universo - SRU (limites)

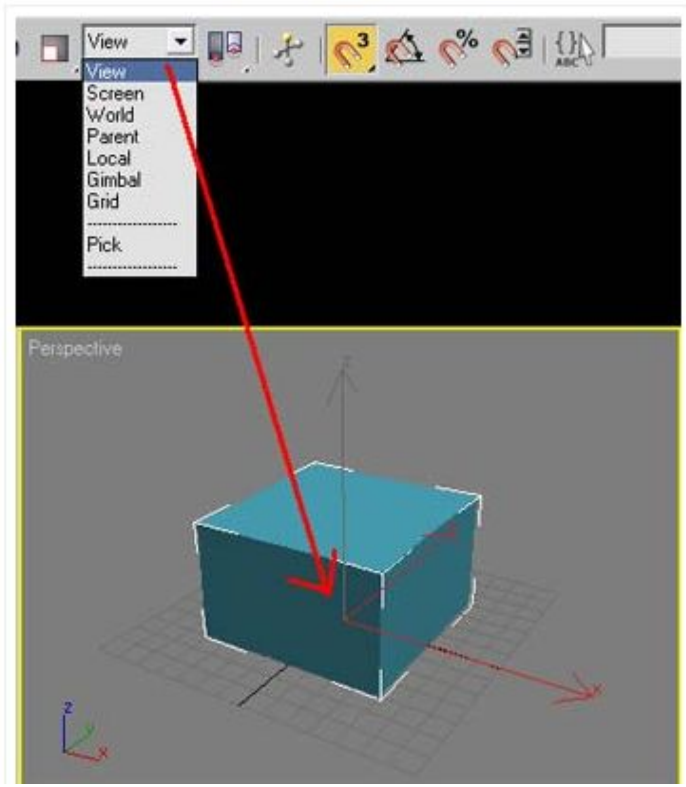
- Cada sistema CADD deverá ter suas limitações extremas. Ex.:
  - Universo de trabalho: Escala de milímetros;
  - Limites da área de trabalho (valores inteiros):
    - X = 0 – 100.000
    - Y = 0 – 100.000

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Objeto – SRO
  - Trata o objeto como um mini universo individual;
  - Cada objeto tem suas particularidades descritas em função de seu sistema;
  - Geralmente o centro do sistema de coordenadas coincide com o seu centro de gravidade.

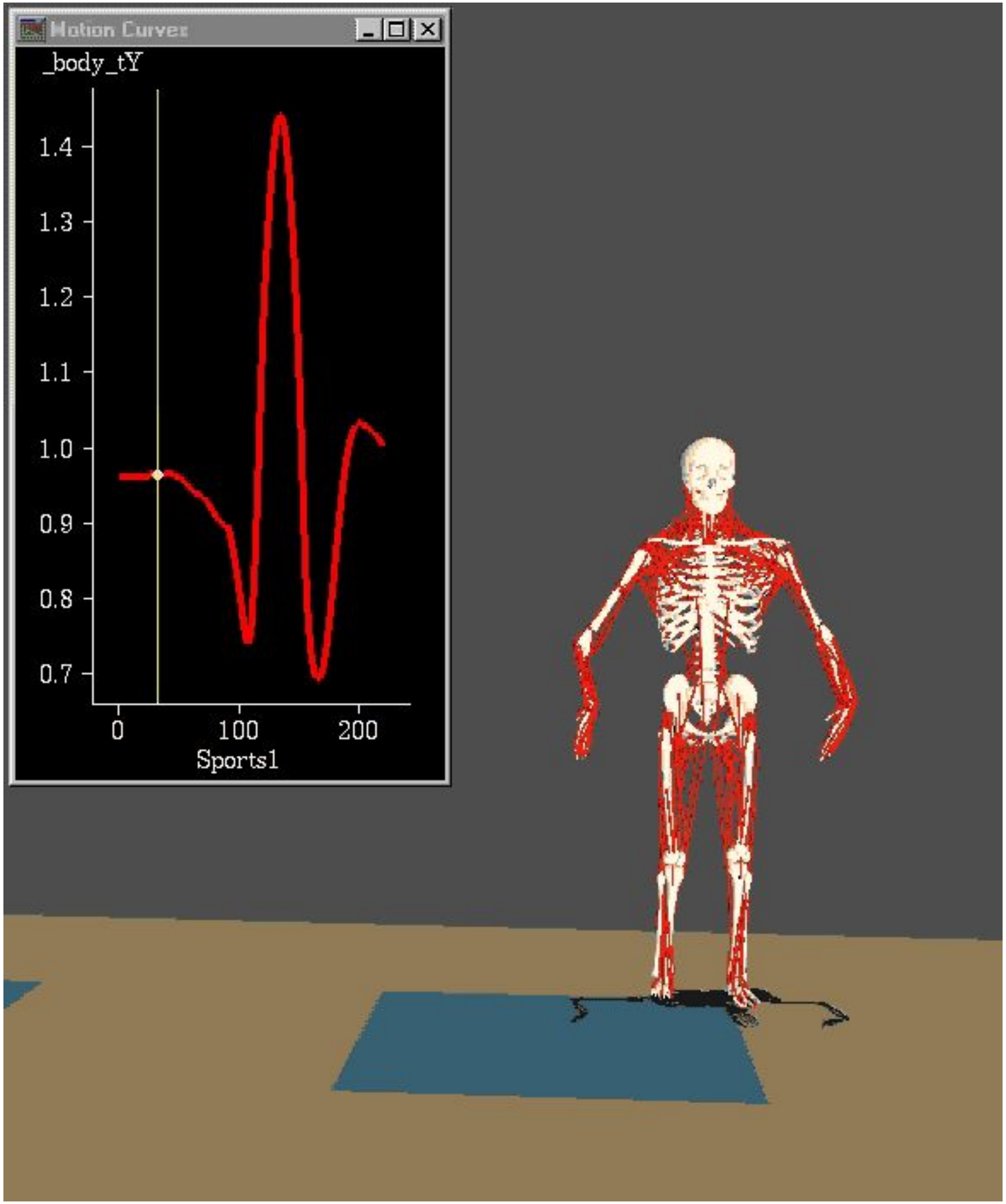
Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Objeto – SRO

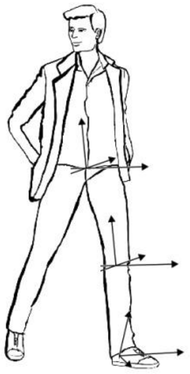


Sistema de Referência do Objeto -SRO

- Cada objeto possui um universo individual, ou seja, suas coordenadas são descritas em função de seu próprio sistema;
- Exemplo:
  - Cenário de um game;
  - Desenhar um objeto ou parte dele;
  - Fazer uma maquete do sistema solar.



Diferentes Sistemas de Coordenadas para um objeto 3D



Objeto a partir da transformação de cubos

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência Normalizado – SRN
  - Trabalha com coordenadas normalizadas (valores entre 0 e 1) Ex.: $0 \leq X \geq 1$ e $0 \leq Y \geq 1$, sendo que ambos os eixos possuem suas coordenadas expressas em números reais;
  - Serve como um sistema de referência intermediário entre o SRU e o SRD;

- Finalidade: Tornar a geração de imagens independente do dispositivo, pois este é um sistema de coordenadas padrão (normalizado);

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Dispositivo – SRD
  - Utiliza coordenadas que podem ser fornecidas diretamente para um dispositivo de saída específico (1024x512, 640x480, 800x600, etc.);
  - Em vídeo pode indicar:
    - Número máximo de pixels que podem ser acesos
    - Resolução especificada na configuração do sistema operacional.

Sistemas de Referência

- Sistema de Referência do Dispositivo – SRD
  - Scanner: resolução máxima estabelecida ou de captura;
  - Nos hardwares o sistema de coordenadas depende geralmente de:
  - Resolução possível
  - Configuração definida pelo usuário entre um conjunto de configurações possíveis.

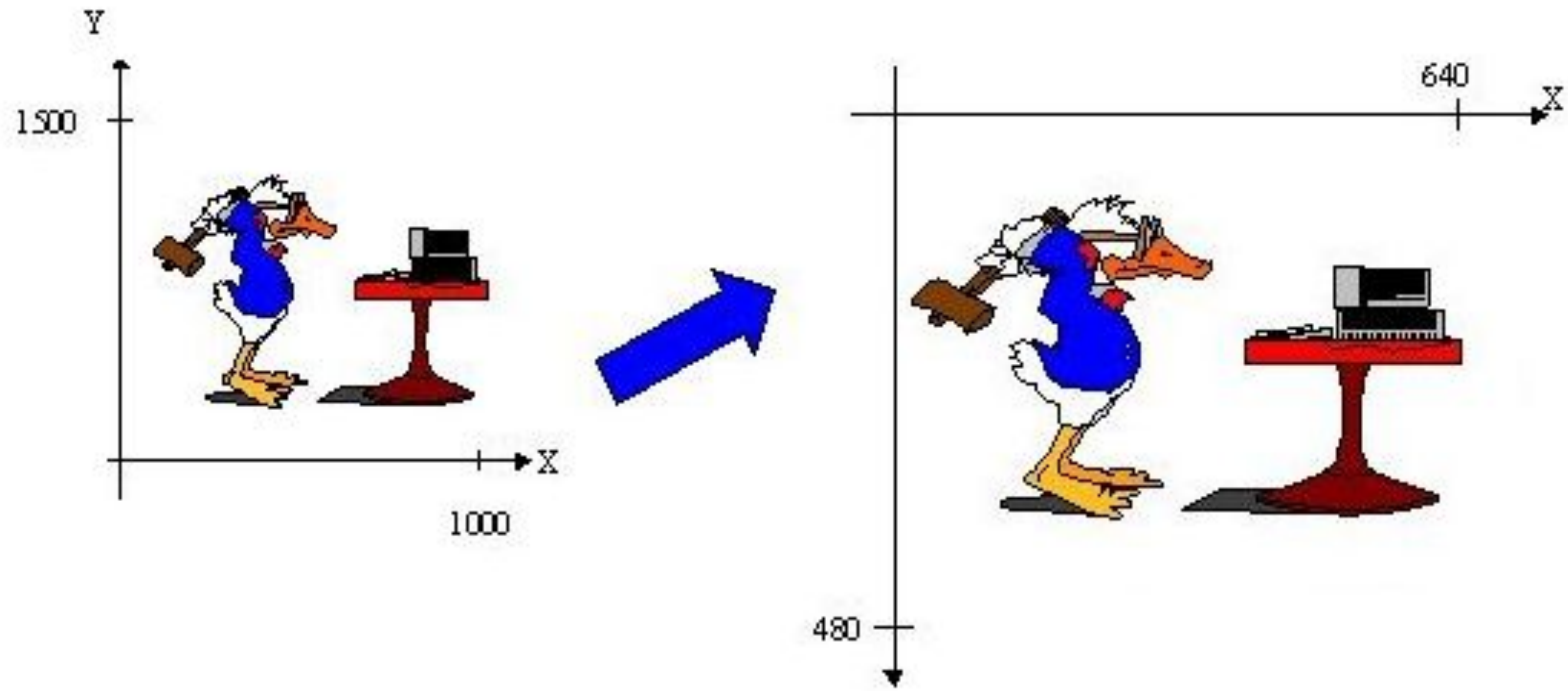
Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Normalmente quando se cria um modelo as informações gráficas dizem respeito à aplicação e não ao dispositivo.

- Para permitir a visualização do modelo faz-se necessário realizar uma conversão dos valores do modelo para valores compatíveis com as dimensões da tela.

- A esta conversão dá-se o nome de **Mapeamento**.

Transformações entre Sistemas de Coordenadas



$$X_D = \frac{X_U * X_{DMAX}}{X_{UMAX}}$$

$$Y_D = \frac{Y_U * (-Y_{DMAX})}{Y_{UMAX}} + Y_{DMAX}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

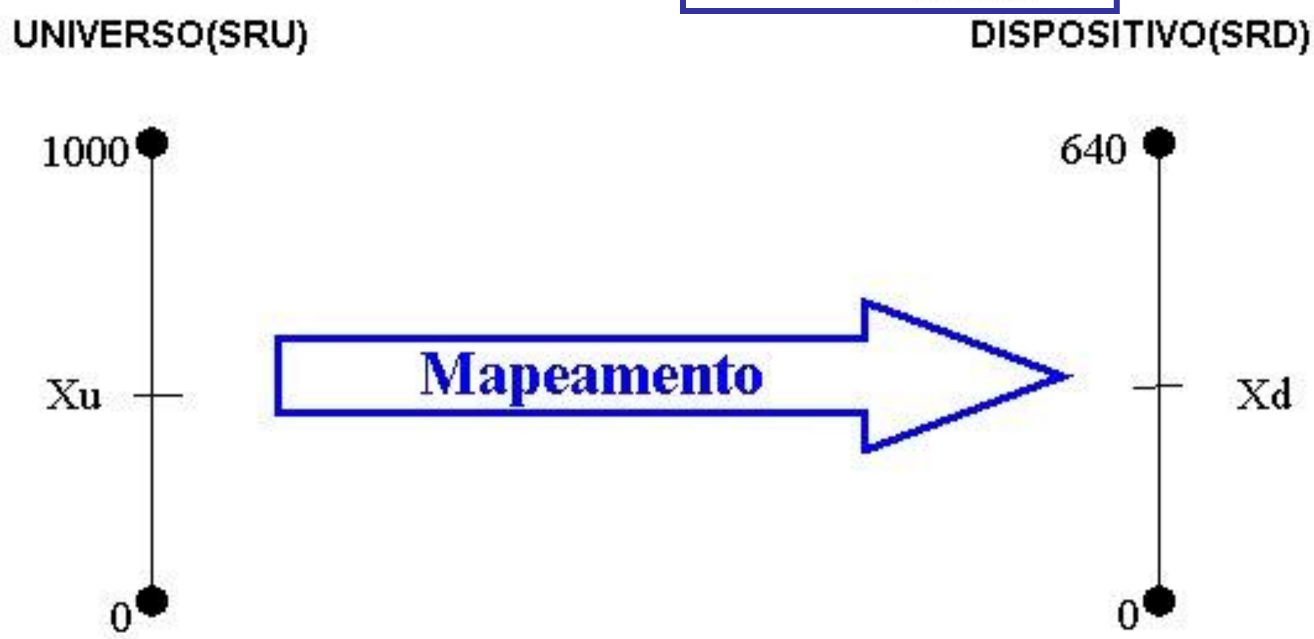
- Dados para a conversão

	Limites do SRU	**Limites do SRD**
Mínimo	(0,0)	(0,0)
Máximo	(1000,1500)	(640,480)

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Iniciando pela componente X temos, de acordo com o diagrama abaixo:

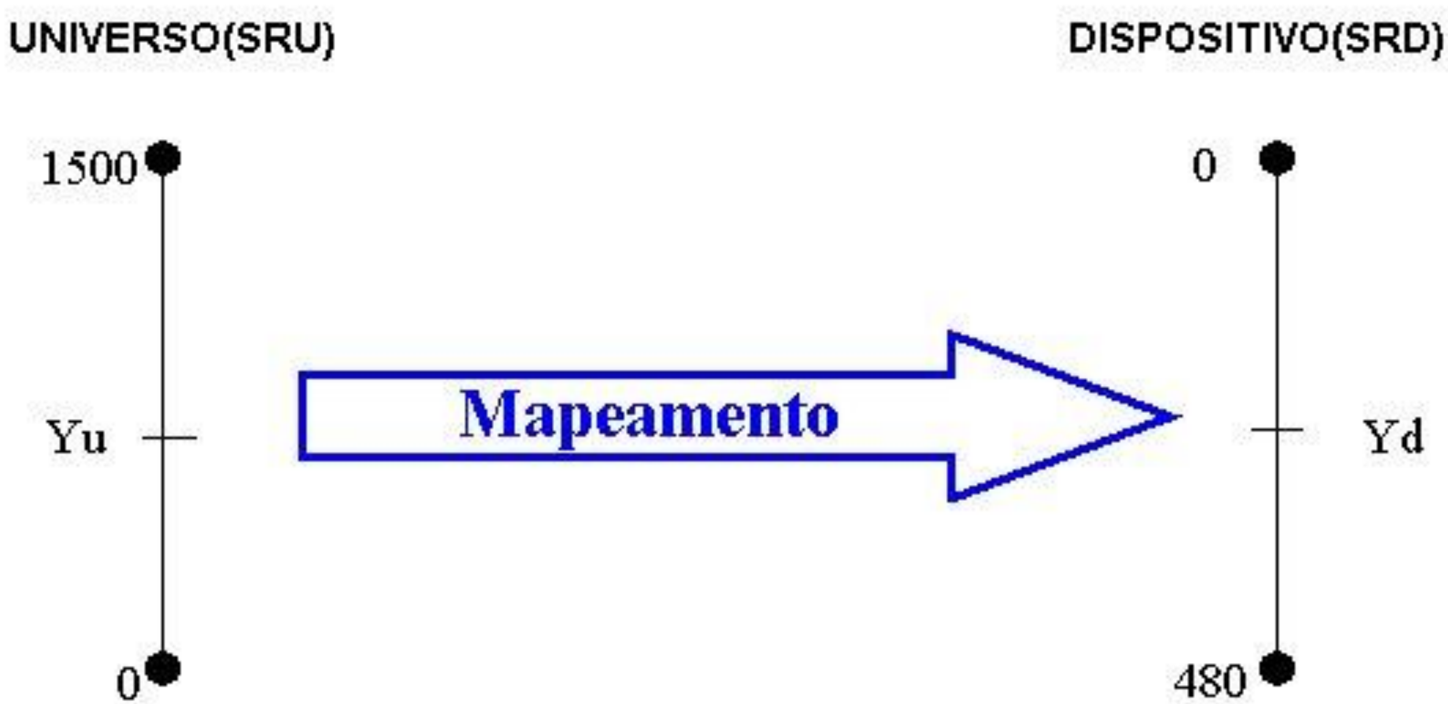
$$\boxed{X_D = \frac{X_U * X_{DMAX}}{X_{UMAX}}}$$



$$\frac{Xd - 0}{Xu - 0} = \frac{640 - 0}{1.000 - 0} \quad \text{ou} \quad Xd = \frac{Xu * 640}{1.000}$$

Transformações entre Sistemas de Coordenadas

- Para a componente Y temos: $\boxed{Y_D = \dfrac{Y_U * (-Y_{DMAX})}{Y_{UMAX}} + Y_{DMAX}}$



$$\frac{Yd - 480}{Yu - 0} = \frac{0 - 480}{1500 - 0} \quad \text{ou} \quad Yd = \frac{Yu * (-480)}{1500} + 480$$

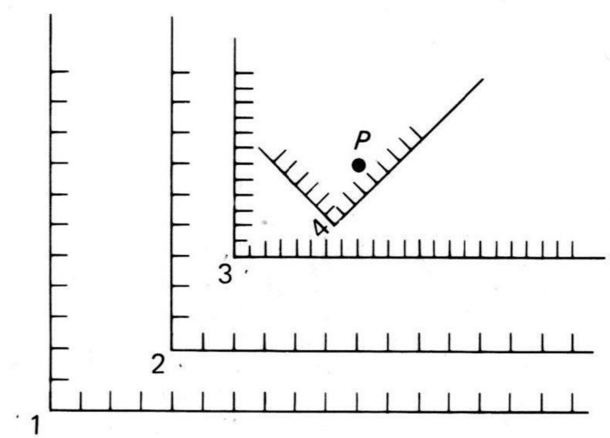
Bases ortonormais

- Base **ortogonal:** vetores que a compoe sao mutuamente **ortogonais**;
- Base **ortonormal:** vetores **ortogonais** e normalizados (unitários);

(Para simplificar passaremos ao R^2 em coordenadas homogêneas)

As 4 bases ao lado são ortonormais ?

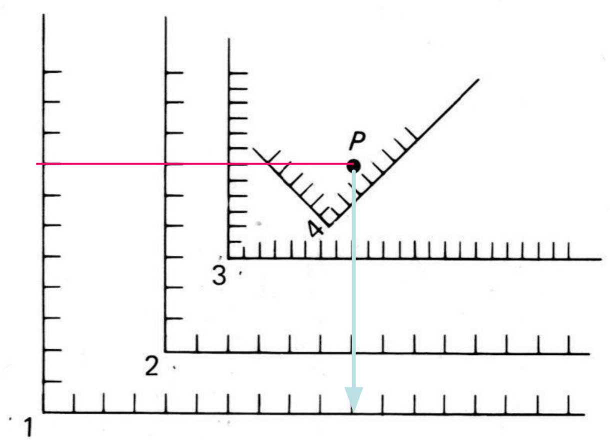
(em relação a elas próprias e em relação a base canônica do R^2?)



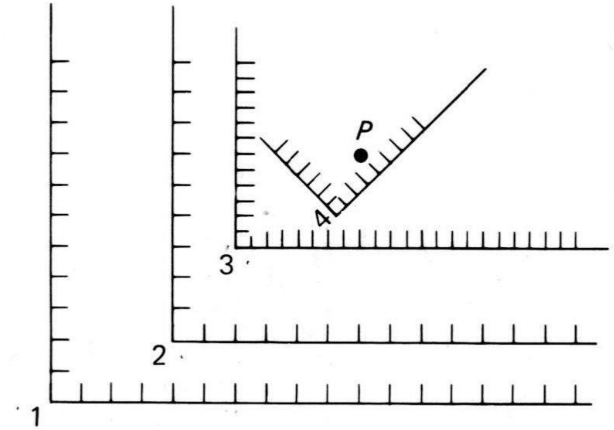
Mudança de base

Dado um ponto em um sistema de eixos como representá-lo em outro sistema qualquer?

$$
\begin{aligned}
P &= (10,8)^1 \\
&= (6,6)^2 \\
&= (8,6)^3 \\
&= (4,2)^4
\end{aligned}
$$



Mudança da base 1 para a 2



$(10,8)^1 = (6,6)^2$

- **A base 2 pode ser vista como a base 1, deslocada para a posição (4,2) . Ou a 1 como a 2 deslocada de (-4,-2).**
- Assim a **matriz de transição** da base 1 para a 2 é dada por: $M_{1\text{->}2}$

$$\mathbf{P^2 = M_{1\text{->}2}\, P^1}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

- E sua **inversa** representa a transição da base 2 para a 1: $M_{2\text{->}1}$

$$\mathbf{P^1 = M_{2\text{->}1}\, P^2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Mudanca da base 1 para a 2

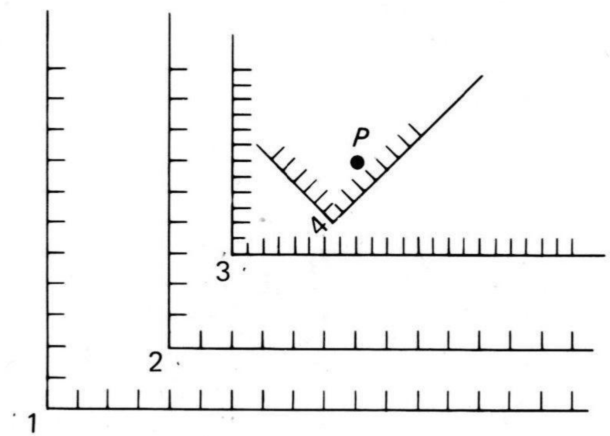
- Repare que a única diferença entre elas é o centro do sistema de eixos
- A **matriz de transição** da base 1 para a 2 é dada por: $M_{1\text{->}2}$ é a identidade combinada com a **descrição** do centro **da base 1** em função do sistema de eixos da **base 2.**
- A **matriz de transição** transição da base 2 para a 1: $M_{2\text{->}1}$ é a matriz identidade combinada com a descrição do centro **da base 2** em função do sistema de eixos **da base 1**.

Mudança da base 2 para a 3

- A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como **deslocada** para a posição (-4,-6) e depois tendo sua unidade de base **amplificada por um fator 2** !
- Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por:
- E sua **inversa** representa a **transição da base 2 para a 3**:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

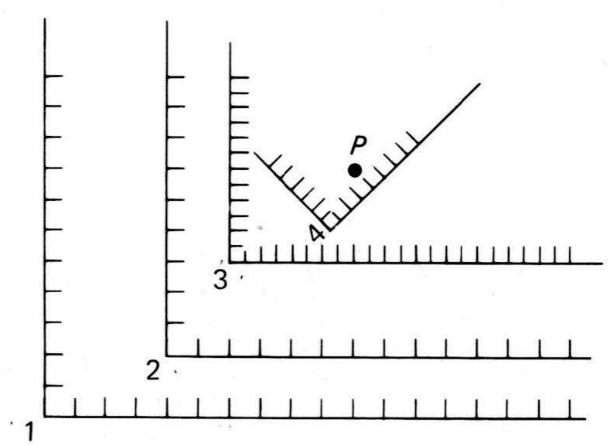
$$\begin{matrix} 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$



Mudança da base 2 para a 3:

$(6,6)^2 = (8,6)^3$

- A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como :
  - deslocada para a posição (-4,-6) e
  - sua unidade de base multiplicada por 2
  - (importante: essa ordem não é comutativa) !
- M**atriz de transição** da base 2 para a 3 $M_{2->3}$:
  - $\mathbf{P^3 = M_{2->3}\, P^2}$



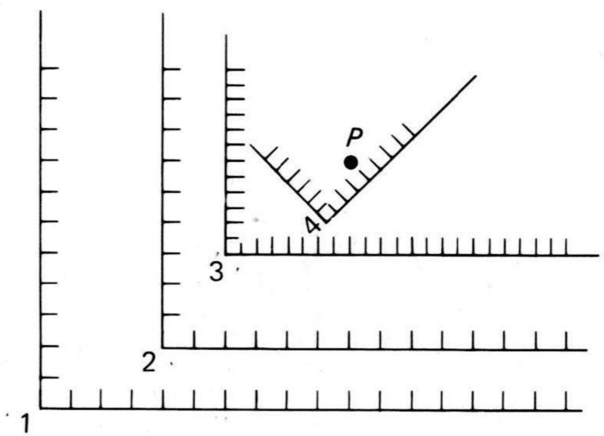
2	0	-4
0	2	-6
0	0	1

Mudança da base 2 para a 3:

$(6,6)^2 = (8,6)^3$

- **Inversa** representa a **transição da base 3 para a 2** $M_{3\to 2}$
  - $\mathbf{P^2 = M_{3\to 2}\, P^3}$
- A base 2 pode ser descrita em função da base 2 como :
  - **deslocada para a posição (2,3)** e
  - depois tento sua **unidade de base multiplicada por 0,5**
  - (lembre: essa ordem não é comutativa) !

Verifique se $M_{2\to 3}\, M_{3\to 2} = I = M_{3\to 2}\, M_{2\to 3}$



$$\begin{matrix} 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Mudança de escala

- Combinação de centros e escalas;
- Supondo que ambos os sistemas tenham o mesmo centro:
  - **Matriz de transição** da base 2 para a 3: colunas formadas pela descrição dos **vetores unitários da base 2 em função do sistema de eixos da base 3 .**
  - Matriz de transição da base 3 para a 2: colunas formadas pela descrição dos **vetores unitários da base 3 em função do sistema de eixos da base 2** .
- Depois combina-se com a descrição do centro da base 3 em função do sistema de eixos da base 2 (i.e. descrever **tudo da 3 em função da 2!**) .

Combinando matrizes de transição

- Repare que você pode ir da base 3 para a base 2, compondo (i.e multiplicando na ordem correta) as matrizes homogêneas :
  - de translação;
  - de mudança de escala.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Combinando matrizes de transição

- Matrizes de transição se combinam como qualquer matriz;
- Repare que você teria o mesmo efeito combinando as matrizes de **translação das origens** e mudança de **escala dos vetores unitários das novas bases**.
- Com mesmo raciocínio você pode ir de 3 para 1 ou de 1 para 3, combinando:

$$\mathbf{P^1 = M_{2->1}\, P^2 = M_{2->1}\, M_{3->2}\, P^3}$$

$$\mathbf{P^3 = M_{2->3}\, P^2 = M_{2->3}\, M_{1->2}\, P^1 =} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{P^1 =} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{P^1}$$

Mudança de base

- Mudando diretamente base ***B*** para uma nova base ***B´:***
  - As **coordenadas homogêneas** na velha base *v* se relacionam com as novas *v´* por uma matriz de transição ***T***: ***v = T v´*** ,
  - As colunas de ***T*** representam os **vetores unitários da nova base** descritos em função dos **vetores unitários da velha base (como se os centros fossem coincidentes)**, e a última coluna descreve o **centro da nova base** em termos da antiga.

Combinando matrizes de transição

Repare que você pode ir da base 3 para a base 1, compondo as 2 matrizes de transição anteriores da mesma maneira como você combina matrizes em coordenadas homogêneas.

Como ficaria $M_{1->3}$ e $M_{3->1}$?

Mudança da base 4 para a 3 (e vice versa)
$= (8,6)^3 = (4,2)^4$

Faça você a última etapa $M_{4\text{->}3}$, $M_{3\text{->}4}$ e também

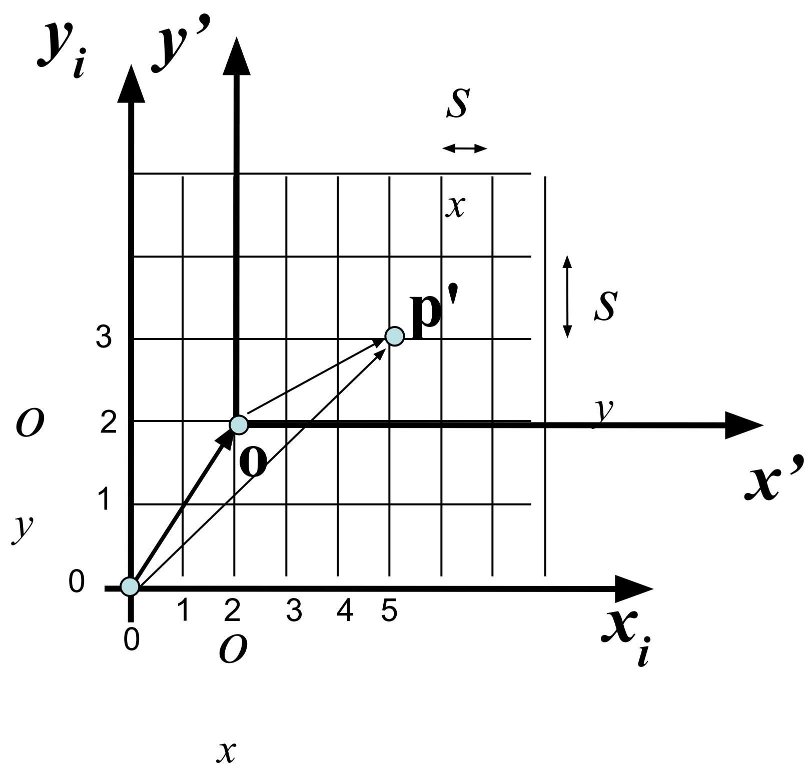
M1->4 M4->1

(Dica : lembre de usar as matrizes de rotação e que a origem do sistema 4 está no ponto **(6,7 ; 1,8)** do sistema 3 !)

Transformações de coordenadas

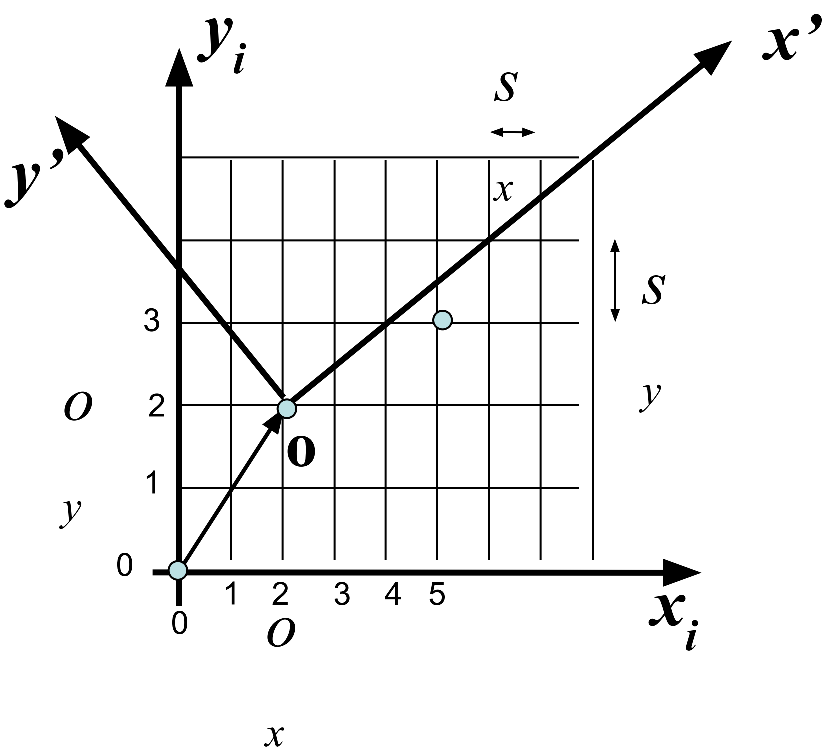
Genericamente não precisa ter uma unidade única nas duas direções!

Origem e vetores unitários é que são importantes



Transformações genérica de coordenadas

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$



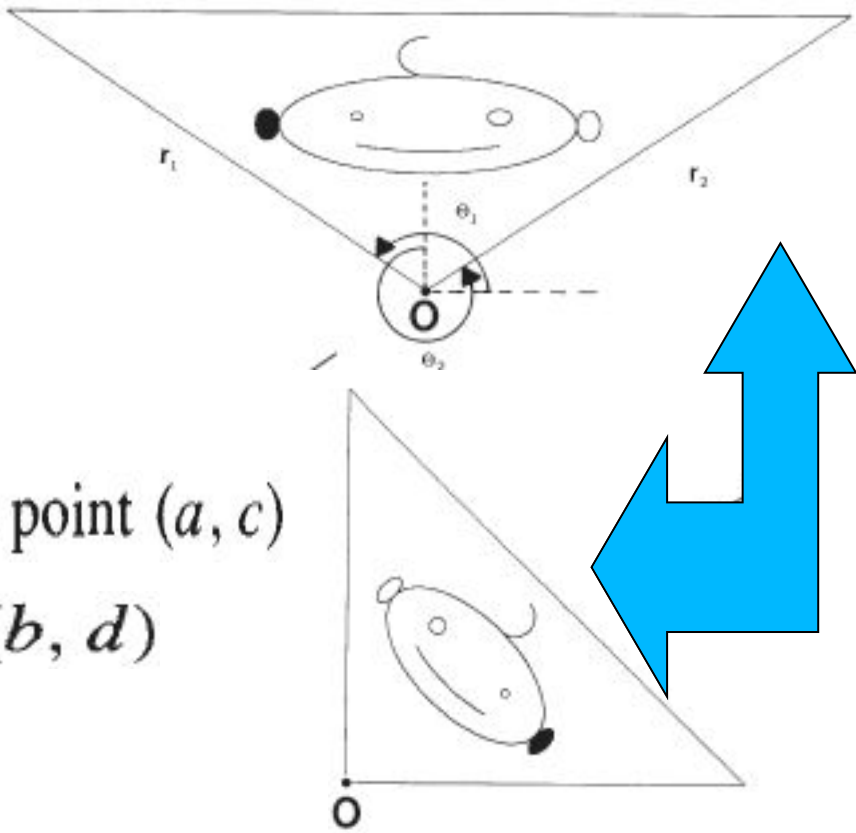
- Os eixos podem estar em qualquer ângulo
- Qualquer transformação afim pode relacionar os sistemas de eixos
- Os eixos podem sofrer qualquer efeito, como se eles mesmo fosse uma imagem.

Transformações afins genéricas!

Cada coluna descreve as coordenadas de a,b,c,d

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos\theta_1 & -r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$



(r_1, θ_1) are the polar coordinates of the point (a, c)

$(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$ $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$

O mesmo vale para bases 3D

Para mudar de um sistema positivo (right handed coordinate system) para um negativo (left handed coordinate system)

A matriz de transição em coordenadas do R^3 (normais) é:

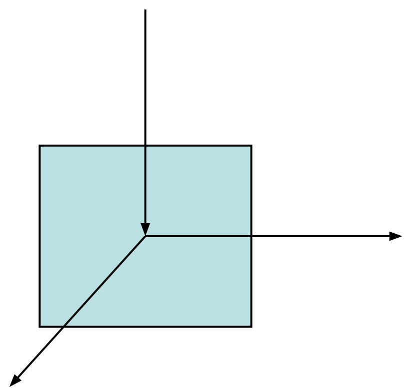
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Como é essa matriz de transição em coordenadas homogêneas ?

Notação tensorial

Considerando ponto como algo muito pequeno mas finito e orientável:

P = pequeno cubo de arestas Δ_1 Δ_2 Δ_3 , ou Δx Δy Δz



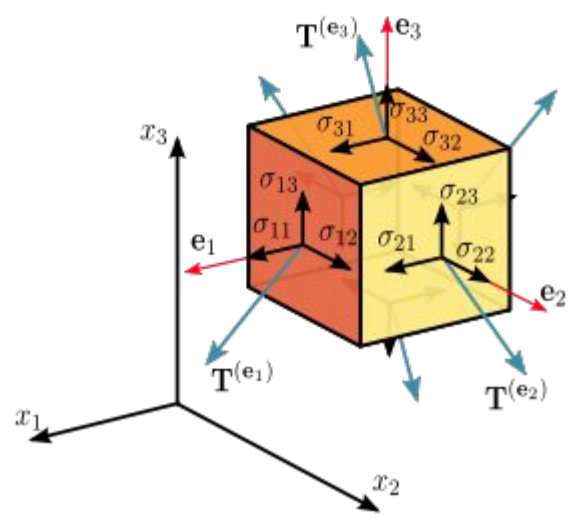
Notação tensorial

- Conhecidas as componentes de um tensor para 3 direções ortogonais em um ponto , as **componentes do mesmo tensor para qualquer direção de sistema de eixos ortogonais passando pelo ponto** pode ser determinada de forma simples, se feita com a **notação** adequada

Notação tensorial

- Considere um ponto P paralelo a eixos de referência xyz ou 123.
- Para identificar os **elementos de um tensor** associado aos planos 123 neste ponto , usaremos **2 índices** , o primeiro identificando o plano (pela sua normal) e o segundo a direção.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



Notação tensorial

Tensor tem 9 componentes:

$$\sigma_{ij} \qquad i,j = 1,2,3,$$

i - > indica a linha

j - > indica a coluna

$$I_{ij} \qquad i,j = 1,2,3,$$

Definem o estado do ponto P em qualquer outra direção de eixos ortogonais.

Notação sensorial

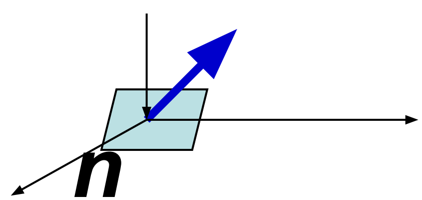
Áreas são caracterizadas pelas suas normais (***n)***;

- Co-senos diretores de uma direção são os co-senos dos ângulos que essa direção faz com um sistema de eixos;
- Denotamos $\boldsymbol{a}_{nx}$ $\boldsymbol{a}_{ny}$ e $\boldsymbol{a}_{nx}$ os co-senos de ***n*** com um sistema de eixos .

Notação sensorial

- Notação de 2 índices:
  – Nesta notação o primeiro índice indica a direção da normal cuja direção se considera e o segundo a direção do sistema de eixos cujo ângulo de identifica o co-seno.

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{nx}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{ny}}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{nx}}$



Notação sensorial

Para um conjunto de co-senos diretores em uma normal n sempre tem-se

$$\boldsymbol{a}_{nx}^{\,2} + \boldsymbol{a}_{ny}^{\,2} + \boldsymbol{a}_{nx}^{\,2} = 1$$

Recordando um pouco noções básicas de vetores tem-se

Produto interno no R^n: *(inner product ou dot product)*

- comprimento ou norma: $||u|| = |u| = (u.u)^{1/2}$,

- um vetor com comprimento 1 é chamado **normalizado** ou **unitário**

- normalizar um vetor => $u \,/\, ||u||$

- distância entre 2 pontos:

PQ =>comprimento do vetor Q-P

Como se calcula a distância entre os pontos (1,1,1) e (2,3,1) ?
Vendo esses pontos como vetores, como eles são transformados em vetores unitários?

Produto interno no R^n

$$(u \cdot v) = |u|\,|v|$$
$$\cos(\beta) = 0$$

Ângulo entre 2 vetores u, v:

arco cosseno $= (\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}) / |u|\,|v|$

Vendo os pontos (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) , (1,1,1) e (2,3,1) como vetores, qual o co-seno do ângulo entre eles? Como se chega ao ângulo ?

Componentes de um vetor

- a projeção de um vetor 3D ***A*** *em uma* direção ***n*** é obtida por
  - $\boldsymbol{A.n = (Ax , Ay, Az) . (nx , ny , nz)}$
  - $\boldsymbol{A . n = (Ax\, a_{nx} + Ay\, a_{ny} + Az\, a_{nz})}$

- Se ***A = (Ax , Ay, Az)*** são as componentes de ***A*** em um sistema de eixos, então suas componentes em qualquer outro sistema ***(x´, y´, z´)*** **"**rotacionado" na mesma origem podem ser definidos pelos co-senos diretores entre as direções dos eixos ***(x , y, z)*** e ***(x´ , y´, z´)*** (1)

Componentes de um vetor

$$\begin{bmatrix} Ax' \\ Ay' \\ Az' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{bmatrix} \qquad (1)$$

- Caracteriza vetores de forma completa:
- Um vetor pode ser definido como uma entidade cujas componentes se transformam em relação a rotação do sistema de eixos com descrito pela equação anterior:
  - $A_{i'} = \Sigma\, a_{i'j}\, A_j \qquad i = x,y,z$

Invariante de vetores

- Vetores também **têm invariantes**:
- Por exemplo:
- O módulo de um vetor independe do sistema de eixos usado para defini-lo :

$$(Ax'^{2} + Ay'^{2} + Az'^{2}) = (Ax^{2} + Ay^{2} + Az^{2})$$

Notação tensorial

- Índice livre - é o que aparece apenas uma vez como subscrito em um grupo de termos .
- *i* é Índice livre em: A_i , $a_{ij} A_j$
- Quando aparece um índice livre considera-se que ele pode representar qualquer uma das componentes x,y z ou 1,2,3 etc... (A_x , A_y , A_z)

Número de Índices livres

- Assim A_i *representa um vetor*

- a_{ij} *tem 2 índices livres e pode representar cada um dos 3 componentes , considerando todas as possibilidades tem-se 9 componentes:*

$$\begin{array}{ccc} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{array}$$

- *Assim* a_{ij} *representa um tensor*

Índice provisório

- Quando as letras ***i,j,k,l,m*** são repetidas em uma expressão ,faz-se a **soma** dos termos com os **índices repetidos** quando esses tomam *sucessivamente os valores dos eixos, x,y,z ou 1,2,3.*
- $a_{i\,k}\ A_{k} = (\boldsymbol{a}_{ix}\,Ax + \boldsymbol{a}_{iy}\,Ay + \boldsymbol{a}_{iz}\,Az)$

- E considerando todas as possibilidades para o ***índice i*** tem a expressão (1)

índices provisórios repetidos = soma = Σ

- Se houver duplos índices repetidos como na $A_{kl}\ B_{kl}$, tem-se após as multiplicações decorrentes das possíveis substituições de cada índice , a soma dos 9 termos.
- Com essa idéia de troca dos símbolos é irrelevante qual letra *i,j,k,l,m* é usada .
- Com essa notação a equação de transformação de vetores fica:

$$A_{i'} = a_{i'j}\ A_j$$

Transformação de tensores

- São tensores qualquer conjunto de 9 quantidades ***Aij*** que se transforma por rotação do sistema de eixos como:

$$A_{i'j'} = \quad a_{i'k}\, a_{j'l}\, A_{kl} =$$

- (que é pré e pós multiplicar pela rotação transposta)

Se os tensores em uma direção *x y z* forem

- $T_{ij} = \begin{matrix} -3{,}5 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0{,}7 & 0 & 5{,}6 \end{matrix}$
- *Como ele é representado em uma referencia* x´y´z´ que faz 30 graus em torno do eixo z.
- Quais os a_{ij} ?

$$\begin{matrix} a_{x'x} & a_{x'y} & a_{x'z} \\ a_{y'x} & a_{y'y} & a_{y'z} \\ a_{z'x} & a_{z'y} & a_{z'z} \end{matrix}$$

- *Cada* a_{ij} *representa o ângulo entre i e i´*

Cossenos diretores

$a_{x'x} = \cos 30$ $a_{x'y} = \cos 60$ $a_{x'z} = \cos 90$

$a_{y'x} = \cos 120$ $a_{y'y} = \cos 30$ $a_{y'z} = \cos 90$

$a_{z'x} = \cos 90$ $a_{z'y} = \cos 90$ $a_{z'z} = \cos 0$

$a_{x'x=0,866}$ $a_{x'y=0,5}$ $a_{x'z}=0$

$a_{y'x=-0,5}$ $a_{y'y=0,866}$ $a_{y'z=0}$

$a_{z'x=0}$ $a_{z'y=0}$ $a_{z'z=1}$

Tensores 2D só na direção *x´ y´*

- $T_{ij} = \begin{matrix} -3,5 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7 & 0 & 5,6 \end{matrix}$ *com i e j = x,y*
- $T_{i´j´}$ *com i´ e j´ = x,y*
- $T_{i´j´} = \begin{matrix} -2,623 & 1,516 & -0,606 \\ 1,516 & -0,875 & 0,350 \\ -0,606 & 0,350 & 5,600 \end{matrix}$

Bibliografia

AZEVEDO, Eduardo e CONCI, Aura. Computação Gráfica: Teoria e Prática. Rio de Janeiro: Campus, 2003.

JUNIOR HETEM, A. **Fundamentos de Informática: Computação Gráfica**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Link: http://www.inf.pucrs.br/~pinho/CG/Apoio.htm