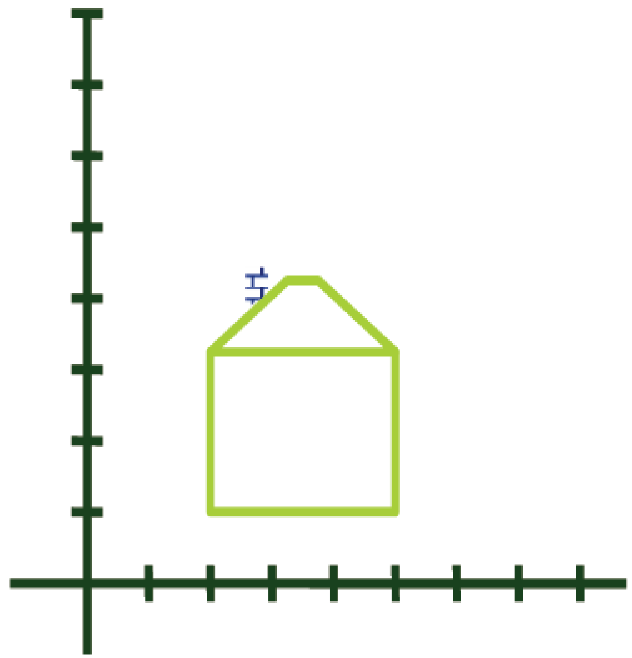
http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html

Curso de CG 2019/1 – IC / UFF

Coordenadas Homogêneas no Plano e no Espaço

$(AB)^T = B^T A^T$



Esse material está no

Livro do curso no cap 2.

Resumindo transformações elementares em 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variação de Tamanho

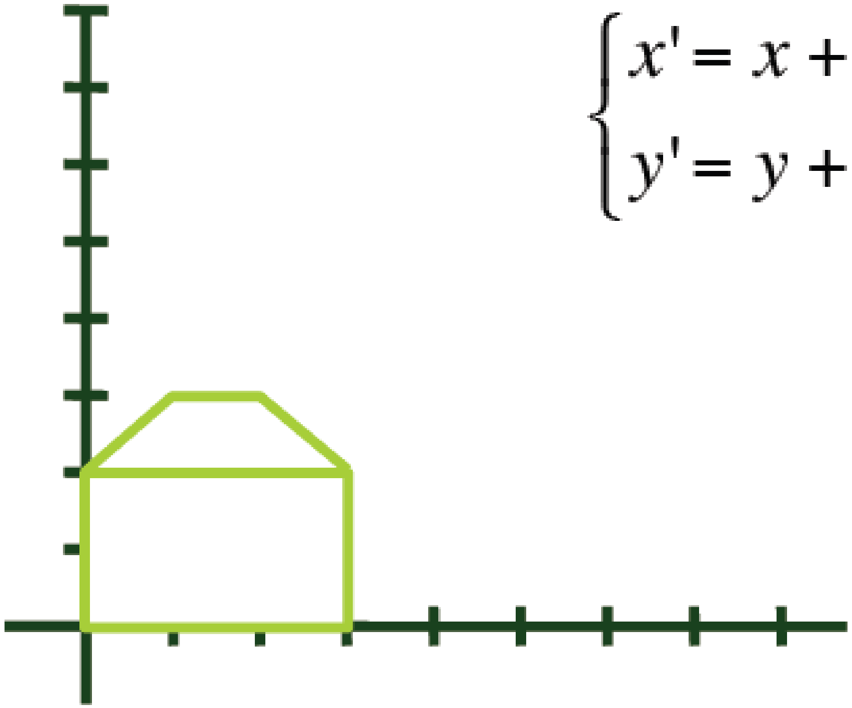
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

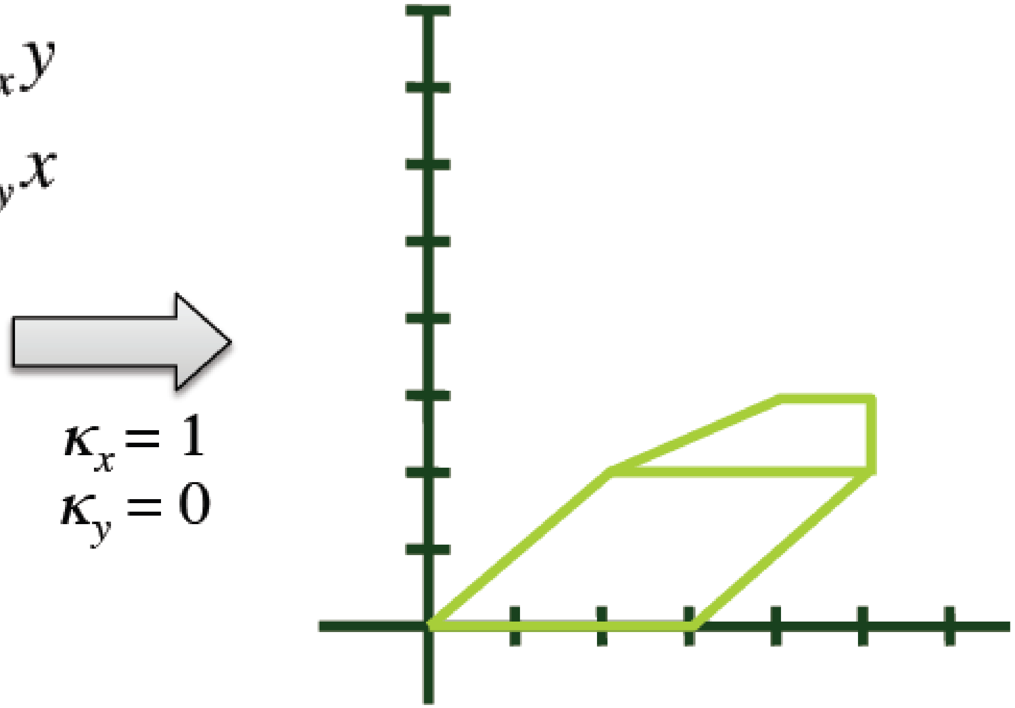
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_x & 0 \\ \kappa_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento

Cisalhamento:



$$\begin{cases} x' = x + \kappa_x y \\ y' = y + \kappa_y x \end{cases}$$



$\kappa_x = 1$
$\kappa_y = 0$

Quase TODAS AS Transformações Lineares Bidimensionais

- 2D
- São representadas por matrizes 2 x 2.

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Transformações

- De corpo rígido (semelhança) são as em que
  - A Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - O Ângulo entre vetores é inalterado.
  - São as : Rotações, reflexões e translações

Transformações Rígidas

- Rotações, Reflexões e Translações.
  - Preservam ângulos e comprimentos.
  - Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^{T}$).

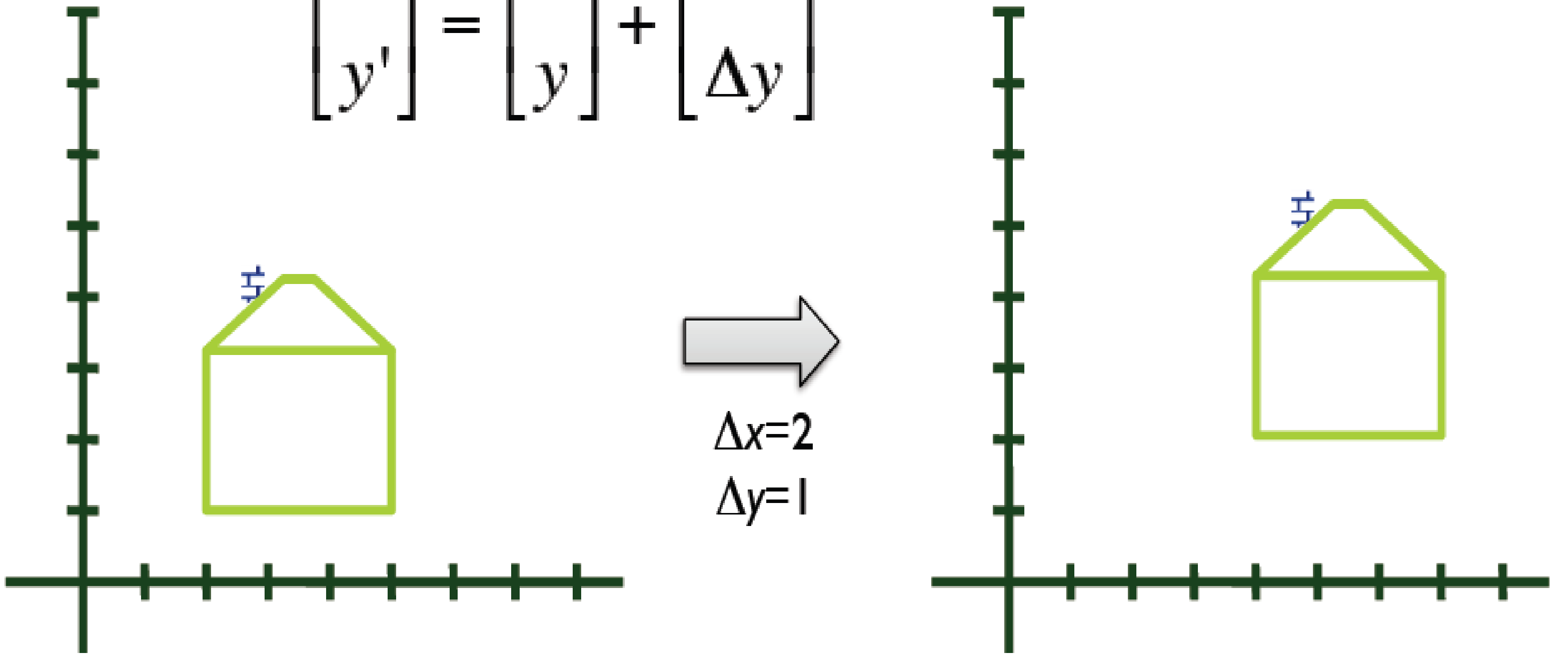
- Importante:
- conceito de rígida e linear (ou afim) é diferente?
- Cisalhamento é rígida?
- E a Mudança de escala?

Objetos em CG: Basta multiplicar *T* aos vetores ou pontos do objeto

MAS TEMOS UMA PROBLEMA:

A translação não é uma transformação linear.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$



Coordenadas Homogêneas

- Reflexão, rotação e escala podem ser executadas com o uso de matrizes

- Mas a transformação de translação não.

- Para solucionar esse e outros problemas é recomendado o uso de **coordenadas homogêneas** para todas as operações.

Coordenadas homogêneas - CH

- no R^2 a CH considera um ponto um elemento do R^3 , o dado adicional é uma relação de escala.

$$P = (x, y, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, 1)$$

- Um ponto do plano é definido como:

  - Chamado $P = [x, y, 1]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).

As Transformações elementares por multiplicação anteriores ficam:

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conjunto de transformações afins (ou afinidades): translação, rotação, **variação de tamanho** (*scaling*) e **cisalhamento** (*shearing*).

Matriz de Translação em Coordenadas Homogêneas

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

E as demais Transformações Lineares em Coordenadas Homogêneas

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora todas podem ser combinadas da mesma forma

- Ou concatenadas
- Ou multiplicadas
- Resultando em uma única de mesma dimensão

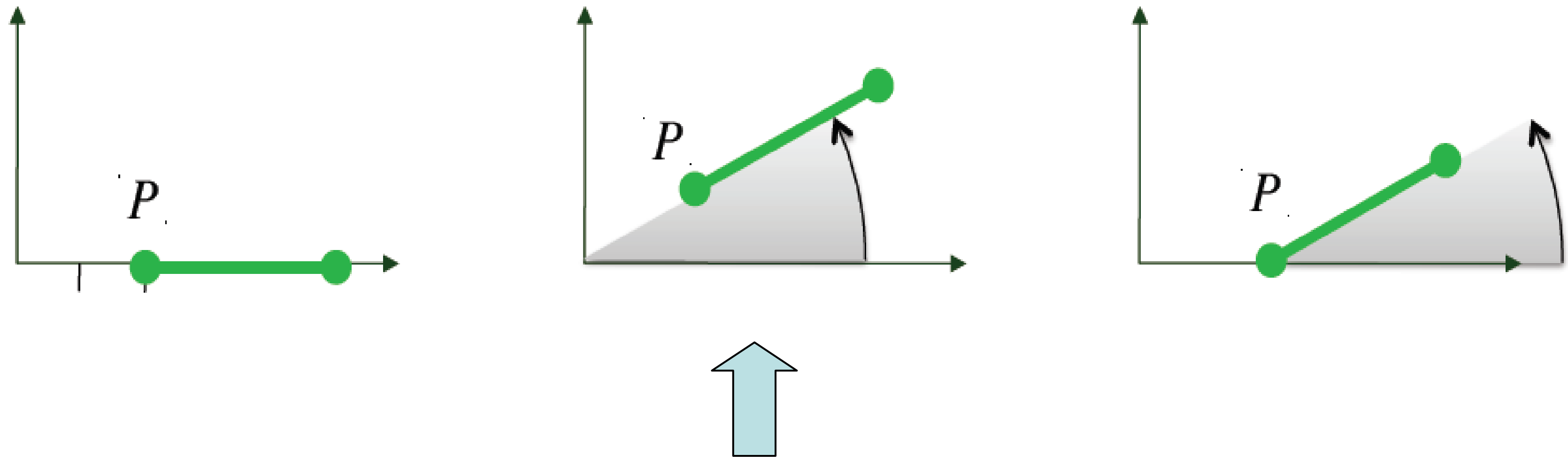
Composição de Transformações afins

- O operador de composição é o produto de matrizes.
- É uma consequência do Axioma da Associatividade da geometria afim e da dimensão 3x3 das matrizes associadas às transformações afins 2D.

- A ordem de composição de transformações afins é relevante.
- O produto de matrizes não é uma operação comutativa.
- A geometria afim não satisfaz o Axioma da Comutatividade.

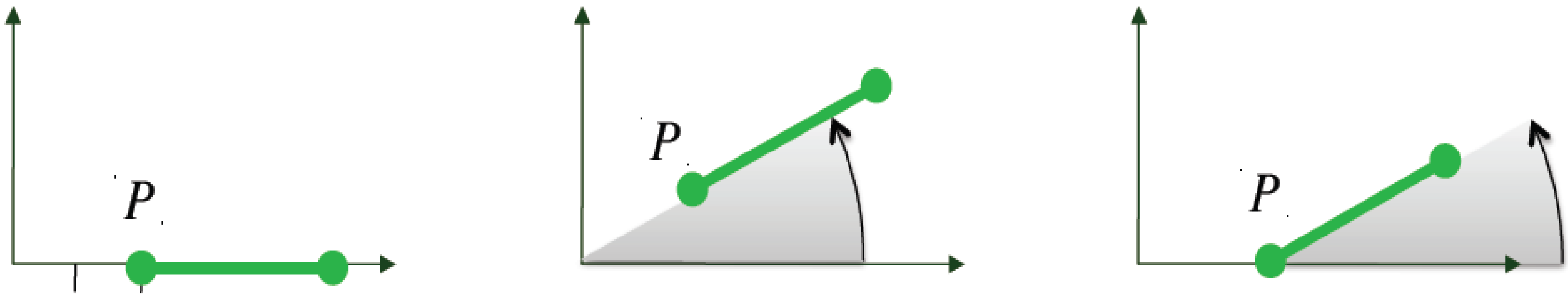
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Imagine que se queira rodar o segmento de reta (2,0)(5,0) em torno de (2,0)



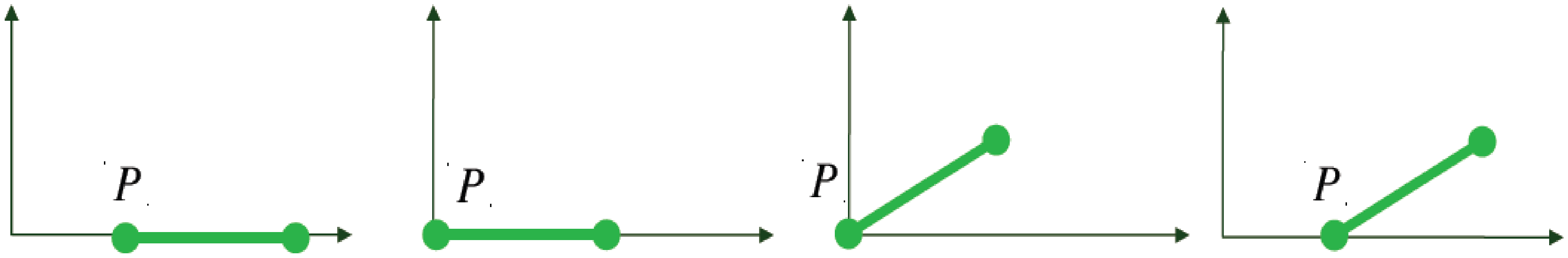
$$\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot$$

Imagine que se queira girar o segmento de reta (2,0)(5,0) em torno de (2,0)

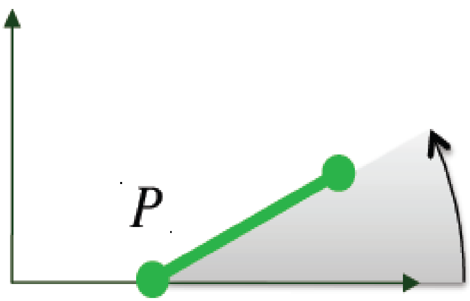


$$\cancel{.\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Imagine que se queira rotar o segmento de reta (2,0)(5,0) em torno de (2,0)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transformações elementares por multiplicação em coordenadas não homogêneas, ficam iguais em homogêneas!

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Translação em Coordenadas Homogêneas fica em uma coluna (ou linha se for na forma transposta) separada

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Todas as matrizes de transformações possíveis em 2D em coordenadas homogêneas

- Devem ser 3 x 3 para qualquer transformações bidimensionais.

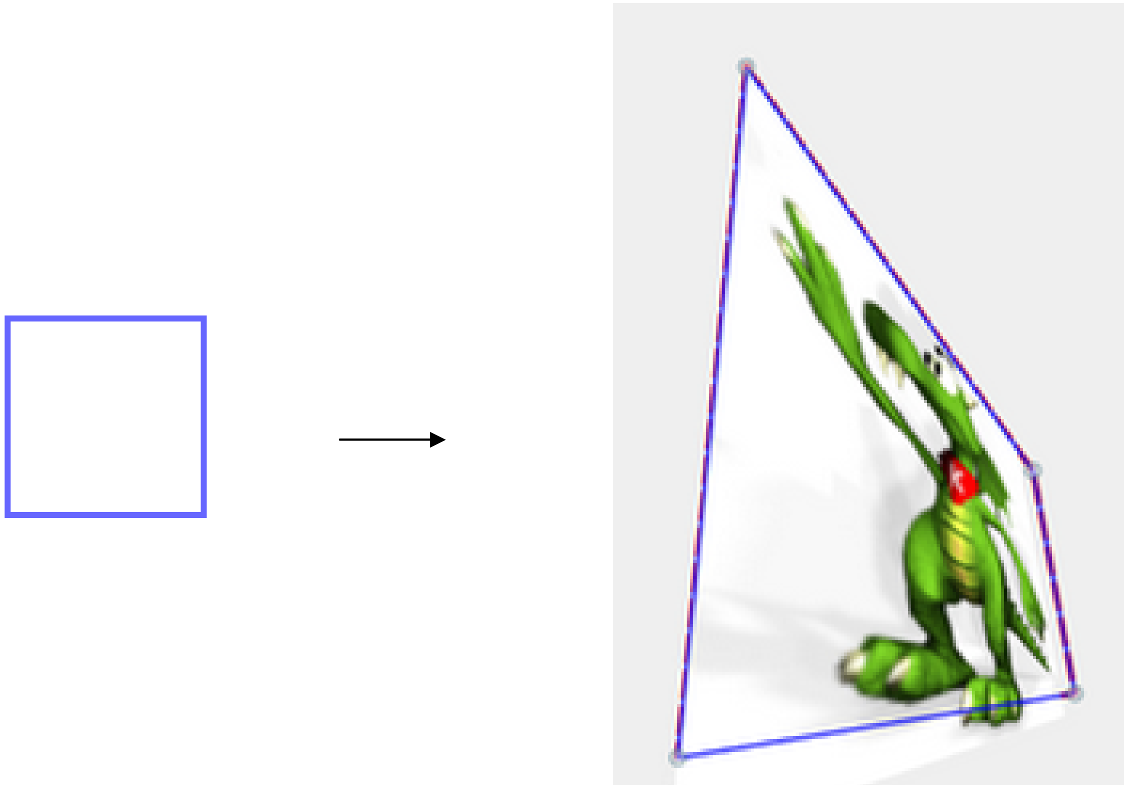
$$M = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Mas qual o sentido da ultima linha ??
(ou coluna se for na forma transposta???)

Transformação Perspectiva em Coordenadas Homogêneas

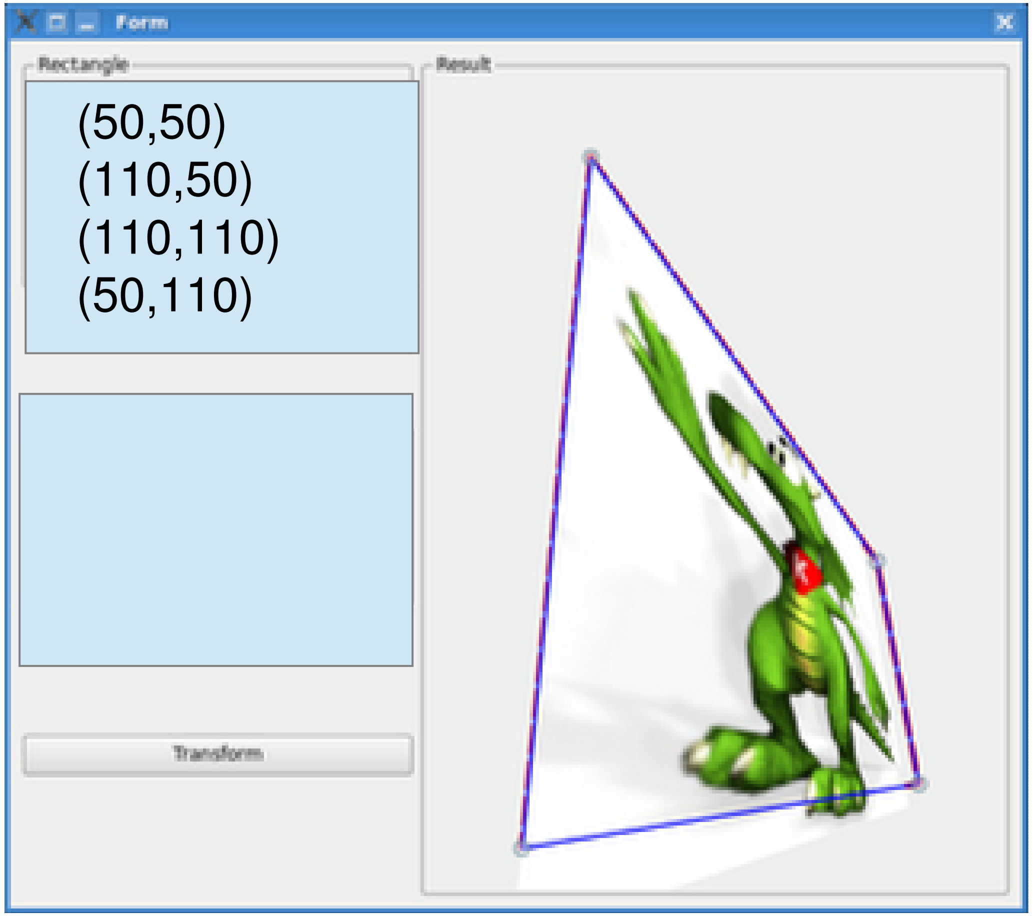
$$M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy+1 \end{pmatrix}$$

Efeito da Transformação Perspectiva 2D



paralelas parecem se encontrar

Transformação Perspectiva 2D



Ponto no infinito

(em Coordenadas Homogêneas) :

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

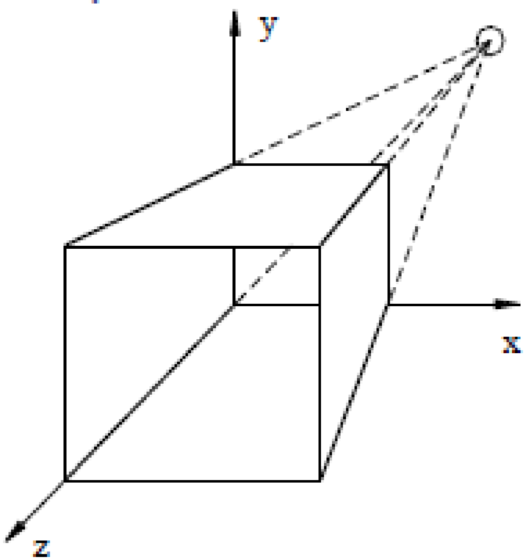
Pontos de Fuga

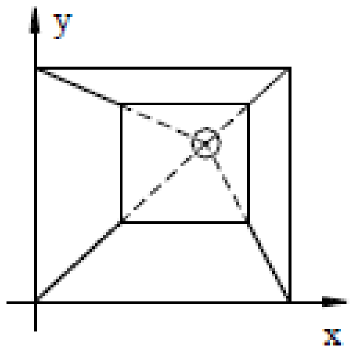
- Um **ponto no infinito** pode ser levado em um ponto P_0 do plano afim.

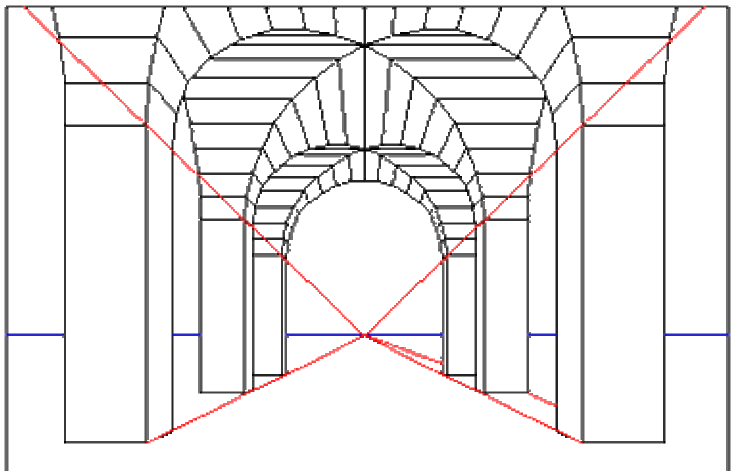
- Família de **retas paralelas** que se intersectam no infinito são transformadas numa família de **retas incidentes em P_0**.
  - P_0 é chamado de **ponto de fuga**.
  - Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
    - Imagem de $[x,0,0]$ ou $[0,y,0]$.

1Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.



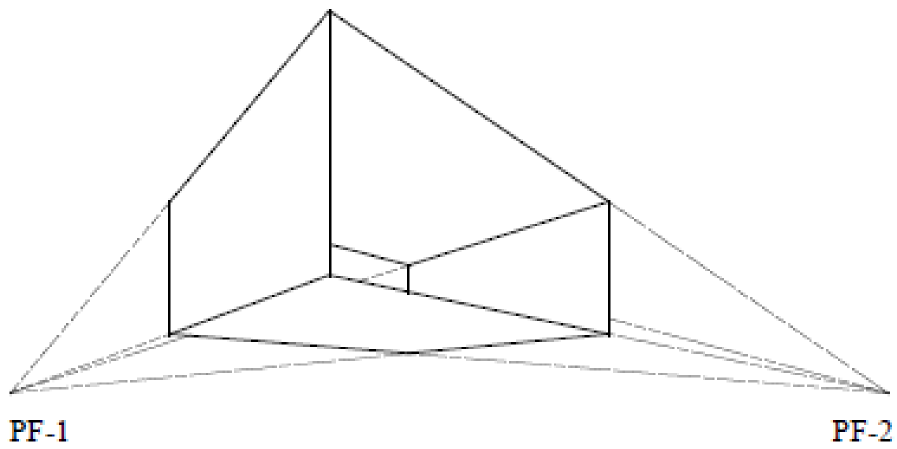




Perspectiva (pintura em tela)

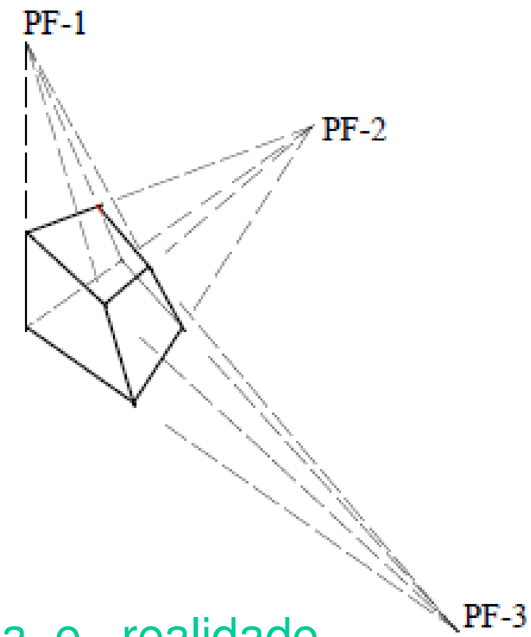
2 Pontos de fuga principais

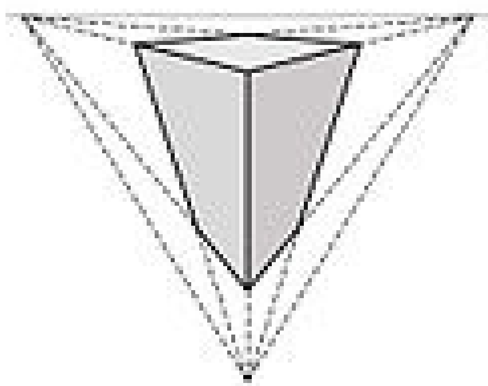
– Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



3 Pontos de fuga principais

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.





3 pontos de fuga e realidade

Possível que não seja muito realista, as vezes

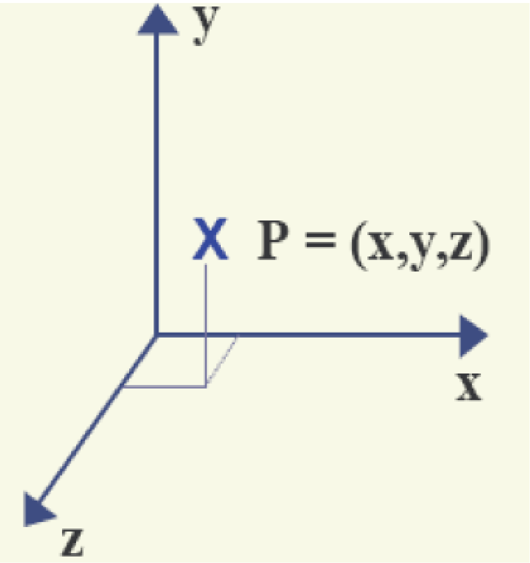
Mas ocorre se o observador estiver muito perto do objeto:

Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

$$P = \{(x, y, z, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1)\}$$

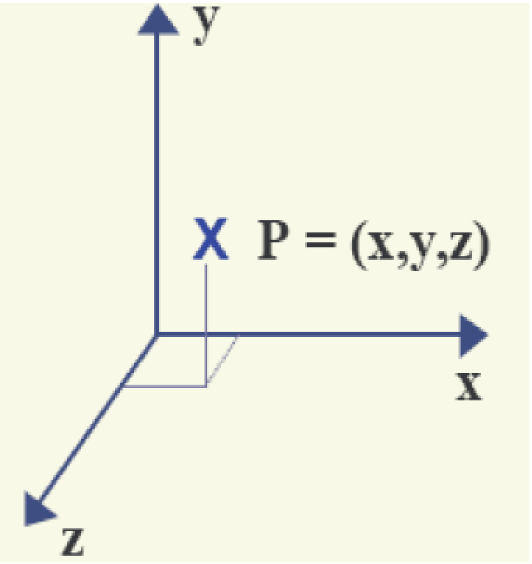
  - Ou Denotado por $P = [x,y,z,w]$ em coordenadas homogêneas.



$(AB)^T = B^T A^T$

Translação no Espaço 3D
em Coordenadas Homogêneas

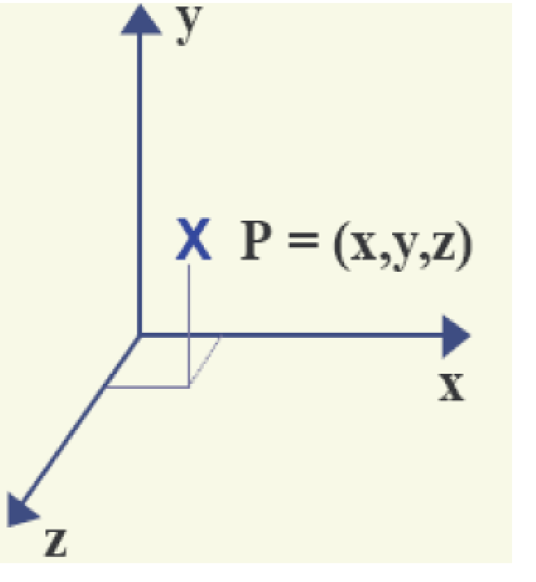
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



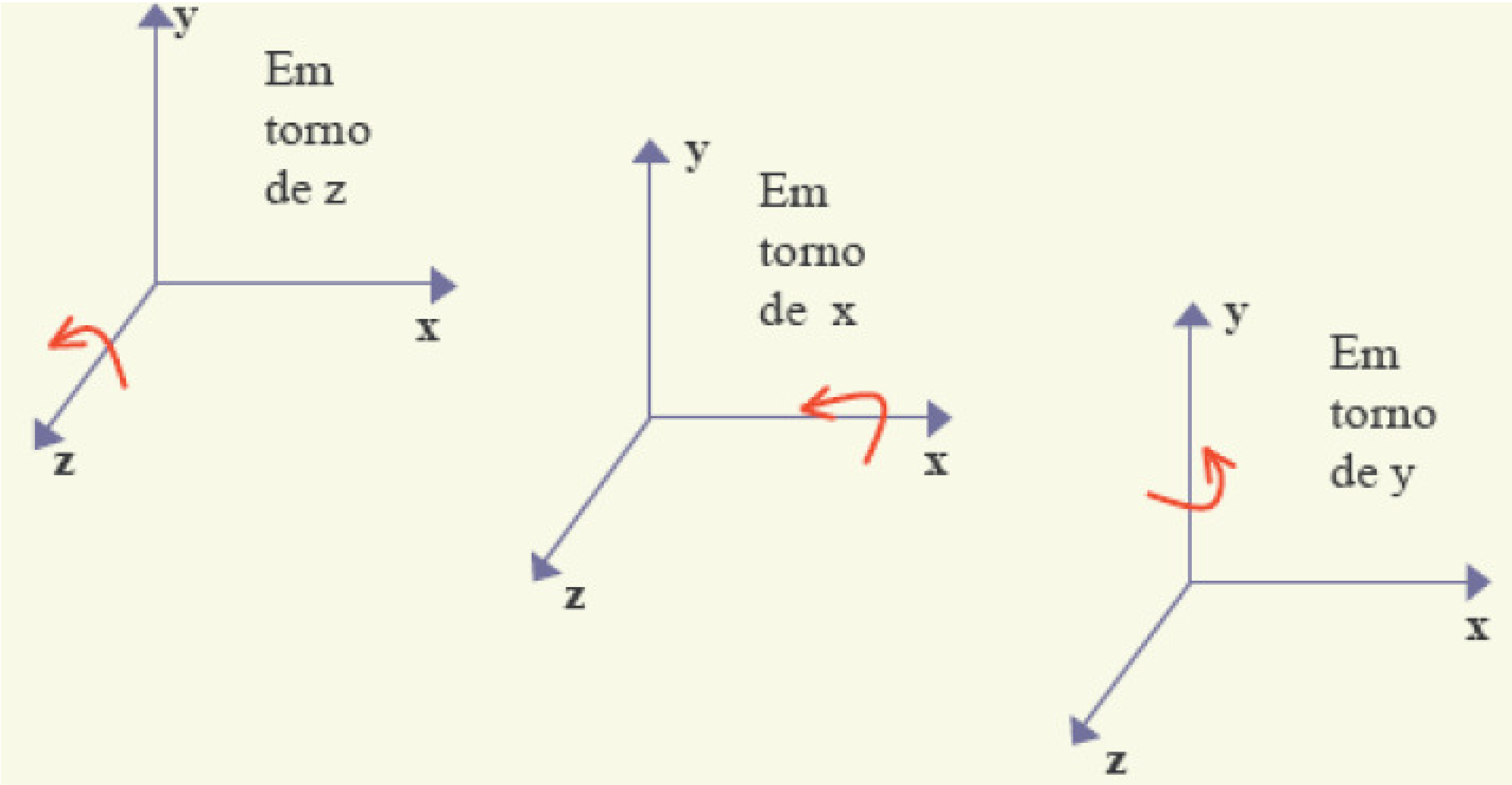
Escala em torno da origem do Espaço 3D em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

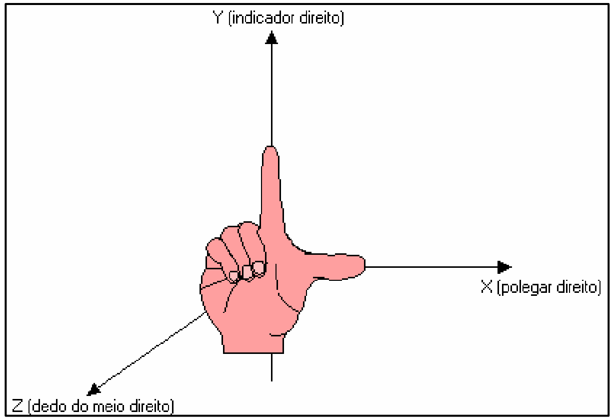
*Obs: se o objeto **não estiver definido na origem do sistema de coordenadas ocorrerá também uma translação**



Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)

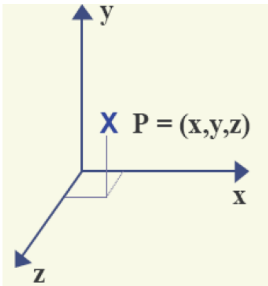


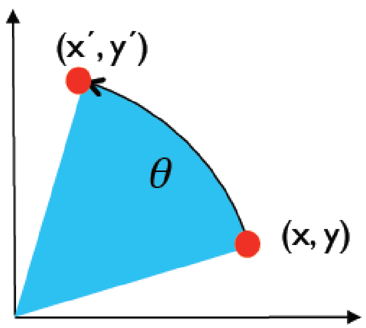
Rotação em torno de um eixo

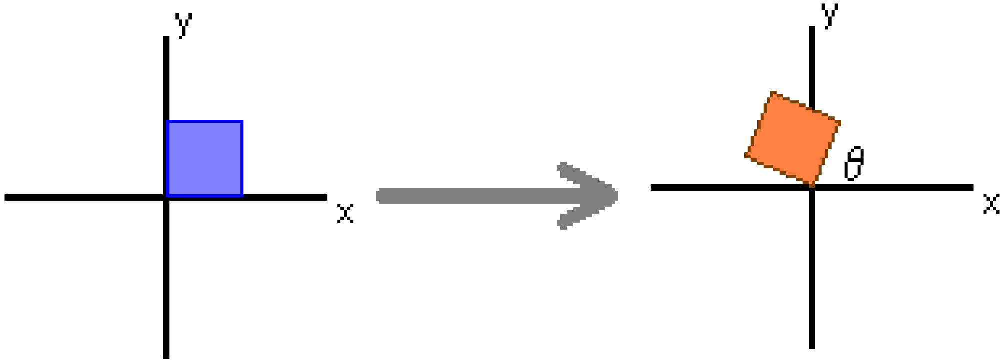


- Ângulos de Euler
- Regra da mão direita
  - **Dedão** esticado no sentido do eixo (eixo x)
  - Dedo **indicador** apontando para segundo eixo (eixo y)
  - Gire a mão e veja se esse giro é em torno do sentido positivo do **terceiro eixo**, se isto acontecer significa que as três direções formam um **sistema de eixos positivos**

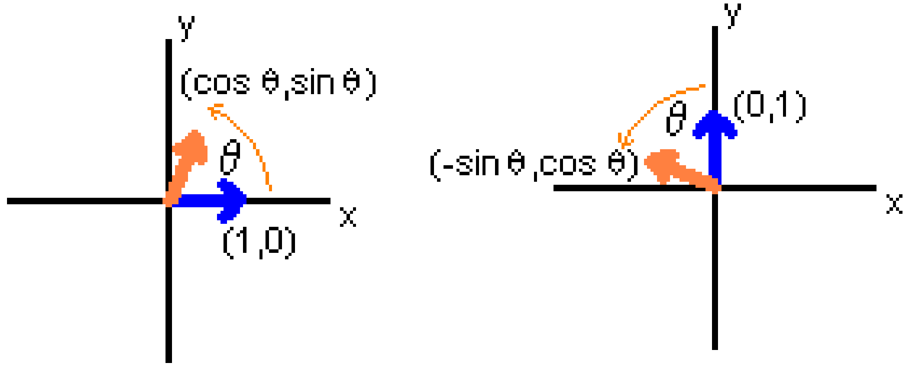
Considerando vetor coluna a rotação no plano xy em torno da origem







$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

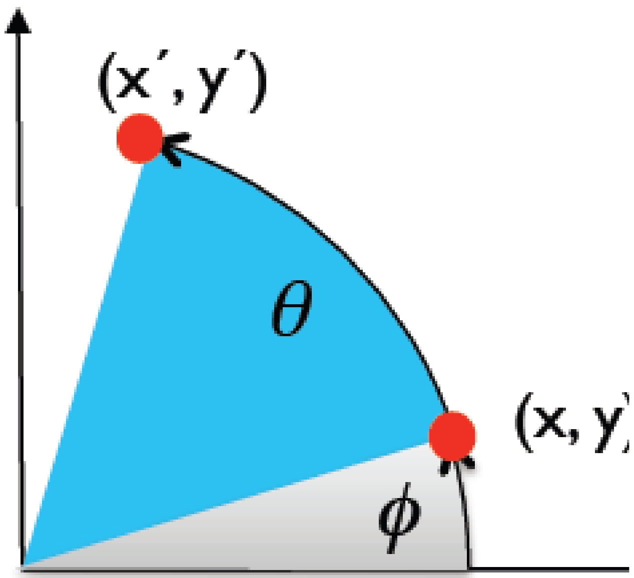


Lembra como esse chegou a essa fórmula:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi+\theta) \\ y' = r\sin(\phi+\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$



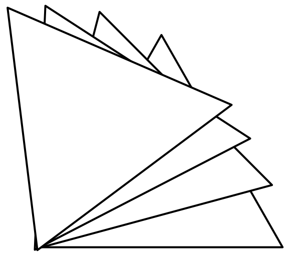
Substituindo r cos(ϕ) e r sin(ϕ) por x e y nas equações anteriores tem-se:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Rotação no plano xy ou em torno do eixo z

- Girar um ponto 2D em torno da origem do sistema de eixos.
  $x' = x \cos(\theta) - y \operatorname{sen}(\theta)$
  $y' = y \cos(\theta) + x\operatorname{sen}(\theta)$
  se for na forma transposta

$$[x' \ y'] = [x \ \ y] \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



se for usado vetor linha $(AB)^T = B^T A^T$

*Obs: se o objeto **não estiver definido na origem do sistema de coordenadas ocorrerá também uma translação**

α

Rotação em 3D em torno dos eixos

se for usado vetor linha $(AB)^T = B^T A^T$

Eixo z => inalterado $[x' \; y' \; z'] = [x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[x\cos(\alpha) - y\,\text{sen}(\alpha) \quad x\,\text{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \quad z\,]$

Eixo x => inalterado $[x' \; y' \; z'] = [x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ 0 & -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$

$[x \quad y\cos(\beta) - z\,\text{sen}(\beta) \quad y\,\text{sen}(\beta) + z\cos(\beta)\,]$

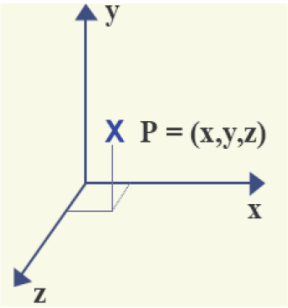
Eixo y => inalterado $[x' \; y' \; z'] = [x \;\; y \;\; z] \begin{pmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\text{sen}(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{pmatrix}$

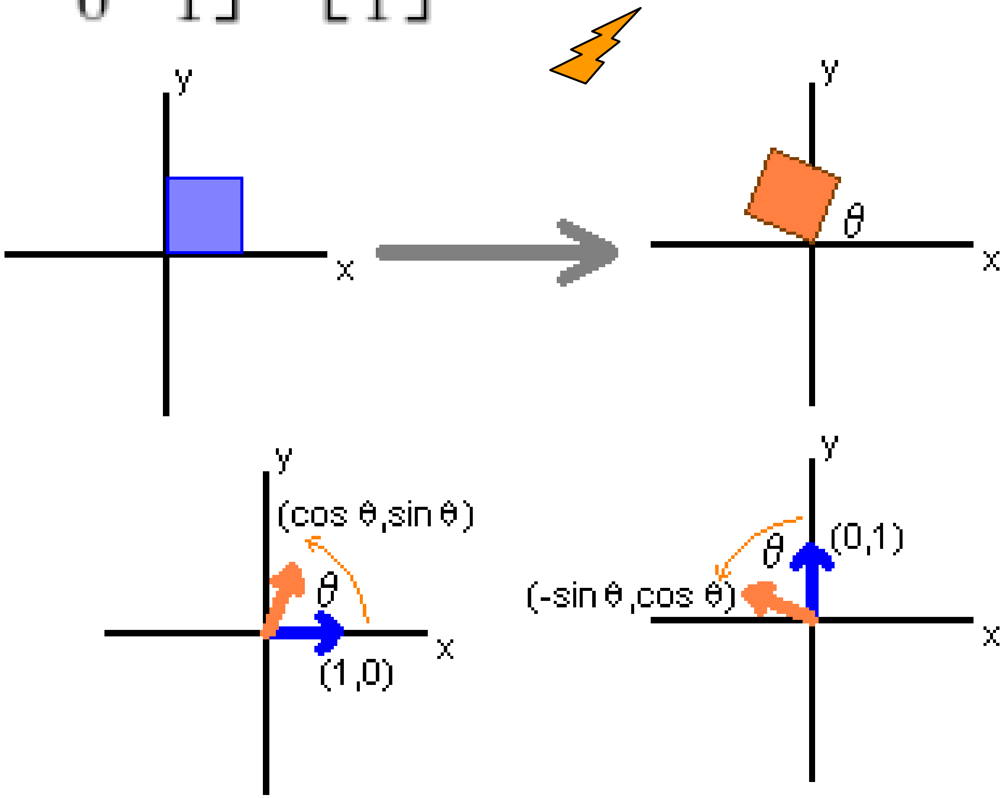
$[x\cos(\delta) + z\,\text{sen}(\delta) \quad y \quad -x\,\text{sen}(\delta) + z\cos(\delta)\,]$

Em torno de Z em CH

se for usado vetor coluna $(AB)^T = B^T A^T$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



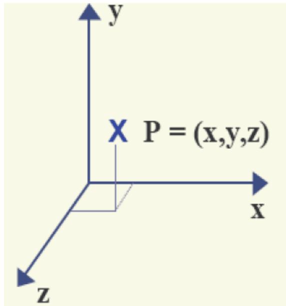


Quando só tenho componente **y**
E giro em torno de **z,** passo a ter uma
Coordenada **x**, negativa
Ou seja do outro lado da origem do Espaço 3D. Assim a coluna 2 da matriz tem que ter um negativo na posição correspondente.

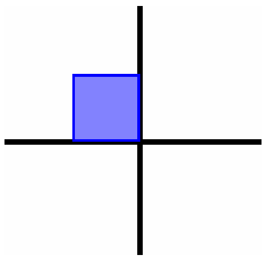
Em torno de X em CH

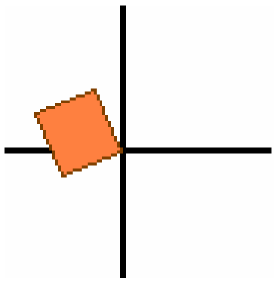
se for usado vetor coluna $(AB)^T = B^T A^T$

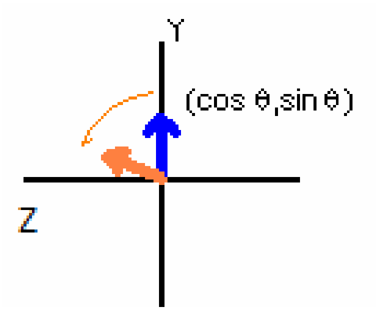
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Quando só tenho componente **y e** rodo em torno de **x**, passo a ter para o ponto só coordenadas positivas . Ou seja na segunda coluna tudo será positivo. Mas veja que nesta orientação do Espaço 3D, quando se desenha em 2D , o Z positivo esta contrario de um X positivo usual em 2D



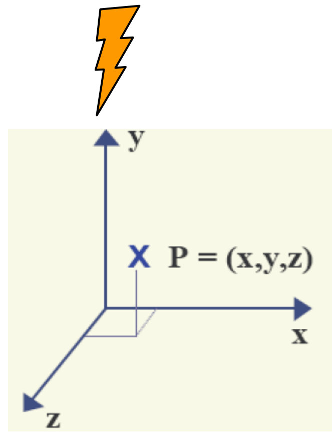




Em torno de Y em CH

se for usado vetor coluna $(AB)^T = B^T A^T$

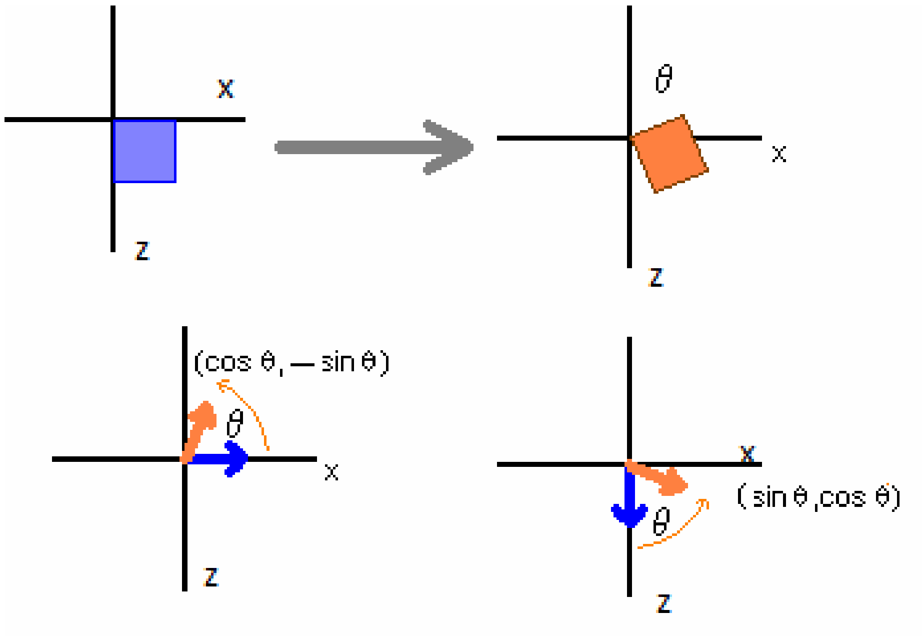
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Quando só tenho componente x e rodo em torno de y, passo a ter uma coordenada x, negativa. Ou seja do outro lado da origem do Espaço 3D.

Ou seja na coluna 1 tem que ter negativo.

Veja que nesta orientação do Espaço 3D, quando se desenha em 2D , o Z positivo esta contrario de um y positivo usual em 2D



Em resumo: Coordenadas Homogêneas 3D

- O sistema de coordenadas homogêneas (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por **(x', y', z', M).**
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação **(x, y, z) = (x'/M, y'/M, z'/M)**
- Os pontos onde M=0 estão fora do espaço dimensional (infinito !!!!) .
- O uso de coordenadas homogêneas é importante em Computação também para permitir a representação de **reais por inteiros**
- Quando M=1 a representação é a mesma das coordenadas cartesianas usuais.

Matrizes em coordenadas homogêneas na **forma de vetores linha** precisa usar a **transporta !!**

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz de rotação

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Escala

se for usado vetor linha

$(AB)^T = B^T A^T$

Translação

- Pode ser representada por operações com matrizes quando usamos coordenadas homogêneas, uniformizando as transformações geométricas

$$[x \quad y \quad z \quad 1] . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{pmatrix}$$

Isso na forma de vetor linha mas na forma de vetores colunas ficaram como transpostas como mostrado nas paginas anteriores...

se for usado vetor linha $(AB)^T = B^T A^T$

Matriz de Transformação

- Transformações geométricas correspondem a operações de soma e multiplicação nas coordenadas que compõem o objeto
- Para evitar que diversas operações matemáticas sejam feitas individualmente em cada vértice é criada uma **matriz de transformação única com coordenadas homogêneas a qual é aplicada todas as transformações**
- Esta matriz é denominada matriz de transformação corrente e é utilizada para transformação de todos os pontos dos objetos

Escopo de Transformações

- Podem ser feitas em serie e a aplicadas uma só fez como uma única (a matriz de transformação de uma serie)
  - Essa operação de transformação nem sempre é comutativa !!!

- A ordem é muito importante !!

Vamos marcar nossa P1?

- O Assunto dela é o capitulo 1 e 2 do livro texto (estrutura de dados, formula de Euler, transformações, projeções e quaternios) .

- Que tal 14/05 ?

Voltado a mais um detalhe sobre o TRAB1:

A ideia é você e seu grupo fazer um com pelo menos **10 figuras** onde se conta a quantidade de acertos e o tempo de resposta da pessoa que está fazendo o teste.

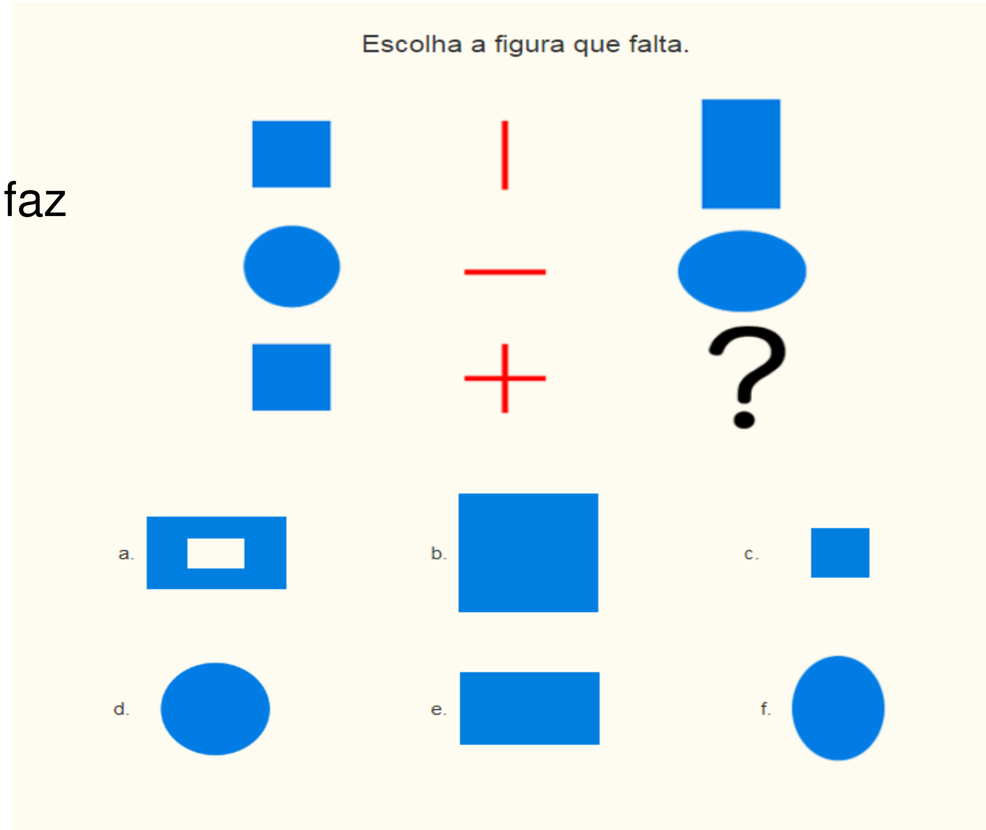
Essas 10 figuras devem aparecer como suas **estrutura de dados topológicas** (lista de faces com vértices que caracterizam cada face) e **geométricas** (lista da posição de cada vértice em coordenadas homogêneas) na primeira definição do objeto.

Isso é como descrito na aula de modelagem.

Estar explícita essas 10 estruturas dos seus objetos como arrays de faces e de vértices é super importante !
Você deve mostrar onde elas estão no seu programa.
Deve usar ao Maximo também matrizes de transformação para copiar suas figuras diversas vezes no seu trabalho.

Os testes são do tipo deste

Isto é devem usar figuras
2D , estruturas de dados
o para armazenar cada figura e
transformações geométricas para faz
as perguntas do teste



Em caso de dúvidas mostre esses desenhos e especialmente o projeto do que será seu game na forma de um story board (layout das telas que compõem seu game) como esse ao lado.

Trabalho 1 Implementação – cont.

- O trabalho pode ser feito em grupos de até 3 pessoas e em qualquer linguagem.
- Cada grupo deve escolher na seqüência para a imagem **faltante transformações 2 D que são ensinada em sala de aula (e será feita por matrizes).**
- Com o assunto da aula de hoje você já pode ir **desenhar suas 10 figuras 2D.** Nesta primeira parte do trabalho (que pode ser visto como um jogo) se mostrarão os desenhos estáticos.
- A parte INICIAL (ou estática) é para ser entregue até 18/04/2019. (devido a não ter tido a aula passada)