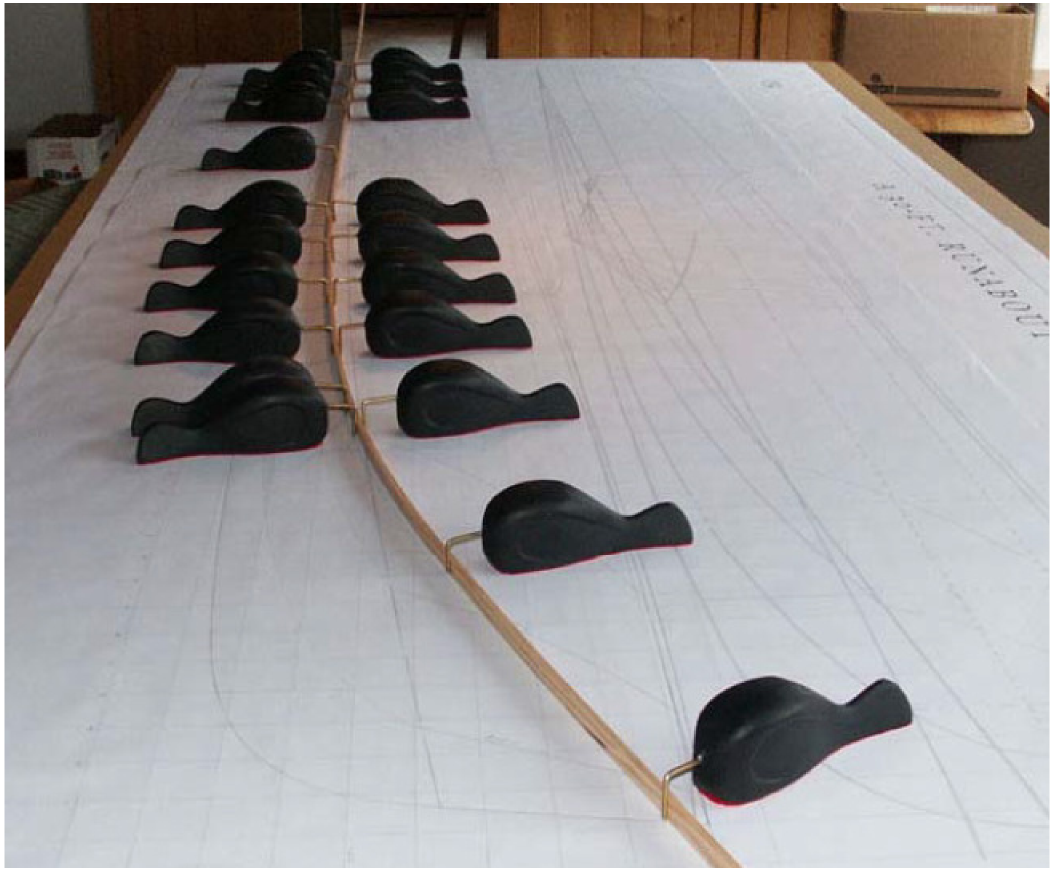
aula 23



Spline física

Curvas Splines

2019/1 – IC / UFF

Uma *spline* é uma linha flexível usada para produzir uma curva suavizada ao longo de uma série de pontos de controle.

Curvas Splines

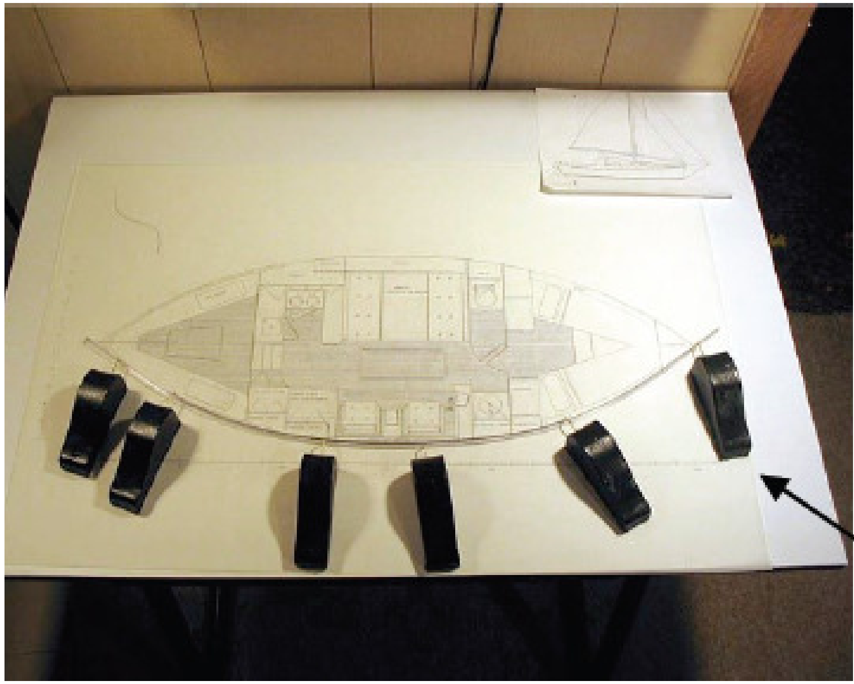
Tem maior suavidade que as de Hermite e Bezier (tem **curvatura continuas**) e são conectadas formando curvas mais complexas.

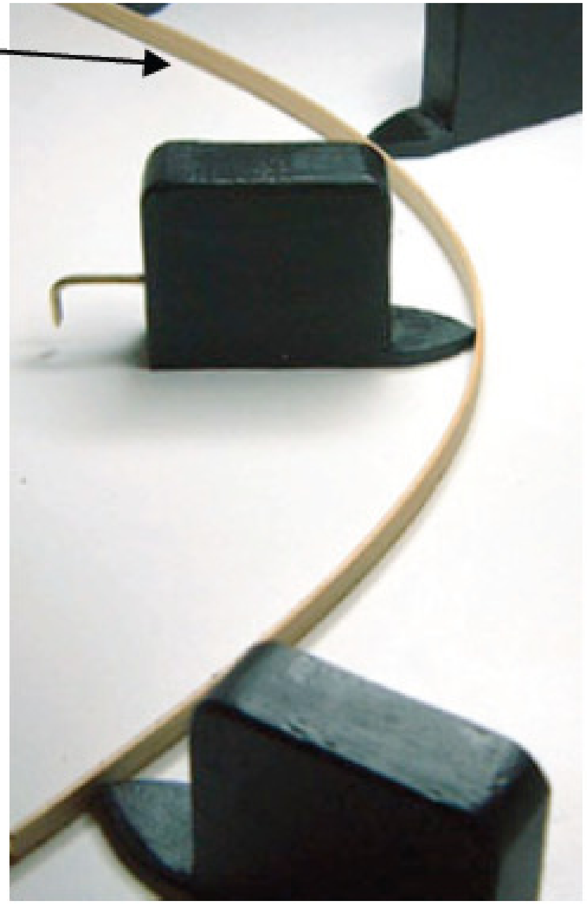
Spline é uma curva polinomial definida por partes

Existem vários tipos de *splines*, cuja amostragem varia de acordo com a fórmula matemática utilizada na sua construção. Elas podem ser interpoladas ou aproximadas.

Metal flexível com continuidade
de curvatura: C^2

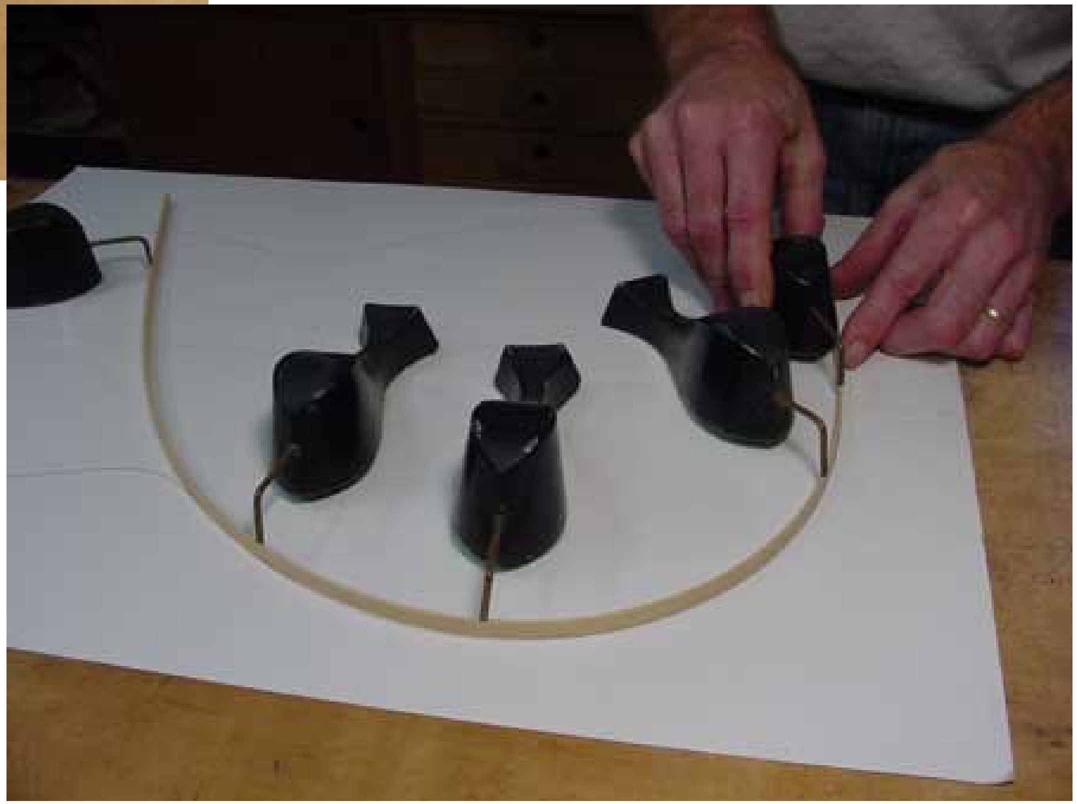
Construindo barcos





Pesos que dão forma são chamados
"ducks" devido a sua forma?

Exemplo de como são usadas



Curvas Splines

- A base de Bézier não é própria para a modelagem de curvas longas
  - Bézier única: suporte não local
  - Trechos emendados: restrições não são naturais
- Base alternativa: B-Splines
  - Nome vem de um instrumento usado por desenhistas
  - Modelagem por polígonos de controle sem restrições adicionais
  - Suporte local
    - Alteração de um vértice afeta curva apenas na vizinhança
  - Existem muitos tipos de Splines
  - Se os nós estão equidistantemente distribuídos a spline é **uniforme**, caso contrário é **não-uniforme**.
    - Uma B-spline uniforme de grau *d* tem continuidade C^{d-1}

Uma equivalência com essa ferramenta de desenho é a

Spline Cubica Natural

Que tem continuidade **C^2** e passa pelos pontos de controle

Ou seja de cara já tem **um grau a mais de continuidade** (suavidade) que as anteriores.

Calcular as **Splines Naturais** com **n** pontos de controle envolve inverter uma matriz de

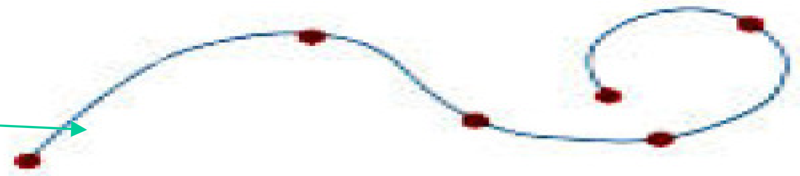
(n+1)x(n+1) pontos

Interpolação com **Splines cúbicas**

Dado um conjunto de N+1 coordenadas de pontos (P_0,P_1,P_2,..P_n), qual seria a função paramétrica cúbica que interpola esse pontos , ou seja precisa-se conhecer os coeficientes $a_x,b_x,c_x,d_x,a_y,b_y,c_y,d_y$ tais que:

- $f(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$
- u: $(0 <= u <= 1)$

Interpolação por Splines Cúbicas



Usa a teoria das vigas esbeltas

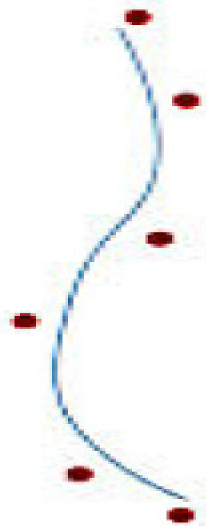
E é apresentada na seção 11.5

de ***Álgebra Linear***

com Aplicações

A. Anton e C. Rorres,

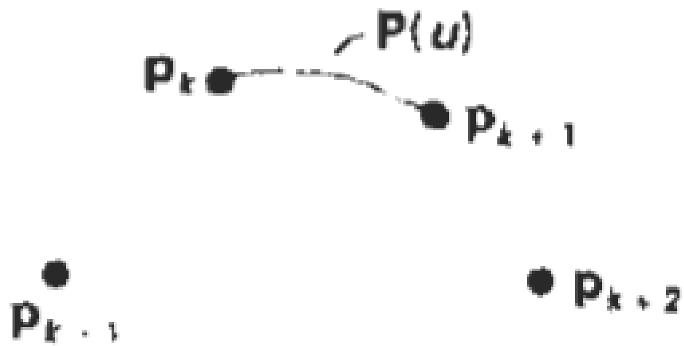
Bookman, 2001



E Capitulo 10 (seção 10.7) de ***Computer Graphics C version*** de D. Hearne e M.P. Baker

Mas "Spline" se refere a um grupo de curvas em CG

Por exemplo a **Cardinal** é especificada por 4 pontos de controle consecutivos:



P(u) é a curva e ***Pk-1 , Pk , Pk+1 , Pk+2*** são os pontos de controle

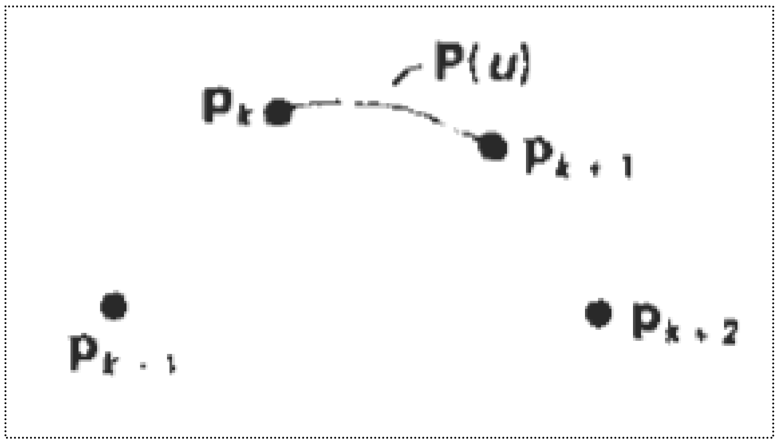
“Cardinal Spline”

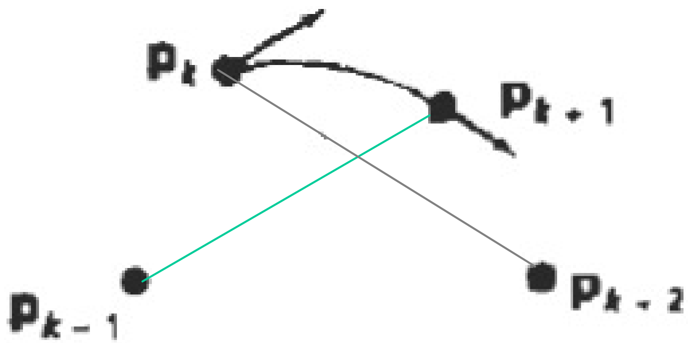
Especificada por 4 pontos de controle consecutivos:

Os 2 do meio definem o inicio e o fim da curva, e os 2 extremos ajudam a definir as inclinações da mesma nas extremidades, usando também o ponto seguinte:

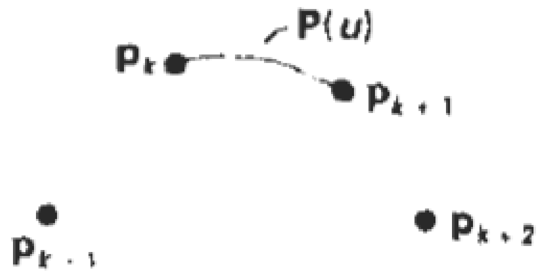
P(u) é a curva

P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, P_{k+2} => ***Os pontos de controle***





“**Cardinal** Spline”



P(u) é a curva

$P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$ => pontos de controle

Especifica ainda um **parâmetro de** ***tensão t*** que junto com os ponto extremos ajudam a definir a influência das inclinações ao longo da curva pela expressão seguinte:

$$P(0) = p_k$$

$$P(1) = p_{k+1}$$

$$P'(0) = \frac{1}{2}(1 - t)(p_{k+1} - p_{k-1})$$

$$P'(1) = \frac{1}{2}(1 - t)(p_{k+2} - p_k)$$

"**Cardinal** Spline"

Se o parâmetro de ***tensão t*** = 0 a curva é chamada de **Catmull-Rom spline ou Overhauser spline**:

Matricialmente ela fica:

$$\mathbf{P}(u) = [u^3\ u^2\ u\ 1] \cdot \mathbf{M}_C \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$s = (1 - t)/2.$$

$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

“Cardinal Spline”

Expandindo as expressões:

$$\mathbf{P}(u) = [u^3\ u^2\ u\ 1] \cdot \mathbf{M}_C \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+2} \end{bmatrix}$$

$s = (1 - t)/2.$

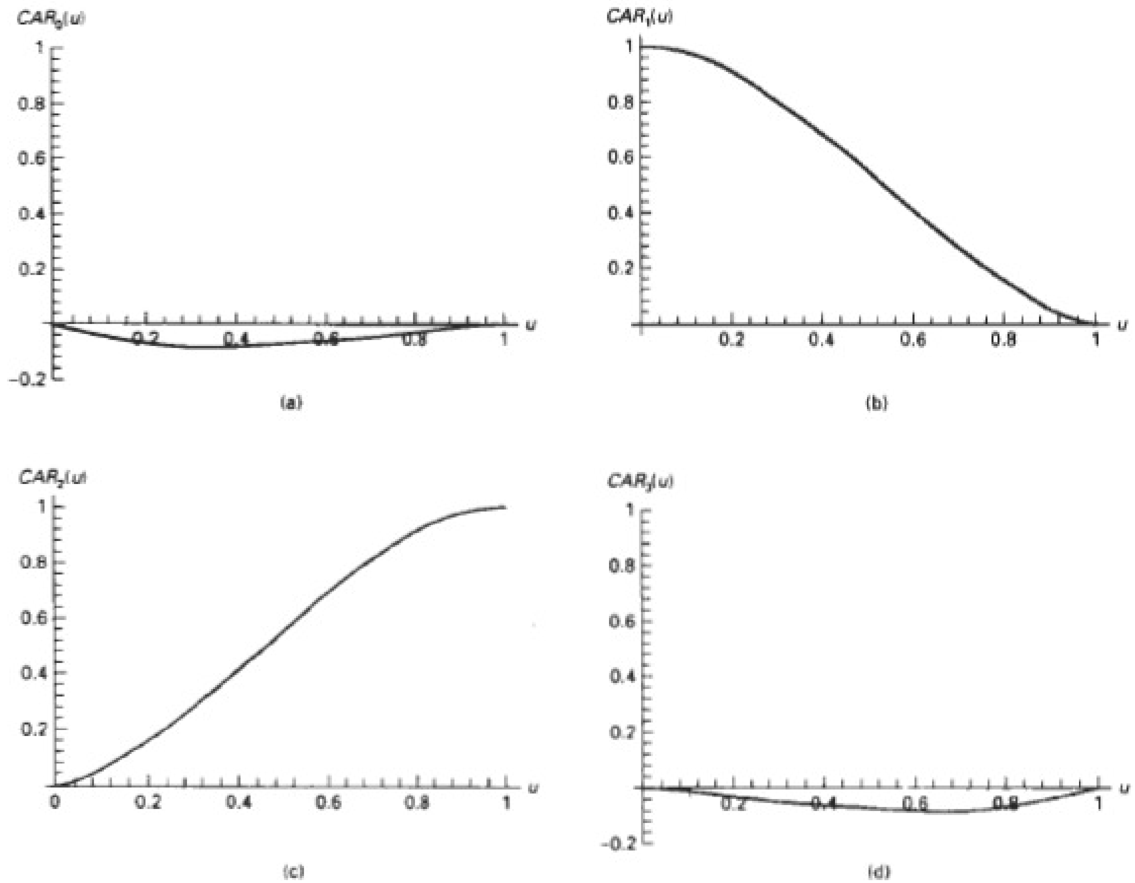
$$\mathbf{M}_C = \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u) &= \mathbf{p}_{k-1}(-su^3 + 2su^2 - su) + \mathbf{p}_k[(2 - s)u^3 + (s - 3)u^2 + 1] \\ &\quad + \mathbf{p}_{k+1}[(s - 2)u^3 + (3 - 2s)u^2 + su] + \mathbf{p}_{k+2}(su^3 - su^2) \\ &= \mathbf{p}_{k-1}CAR_0(u) + \mathbf{p}_kCAR_1(u) + \mathbf{p}_{k+1}CAR_2(u) + \mathbf{p}_{k+2}CAR_3(u) \end{aligned}$$

Onde CAR_0, CAR_1 CAR_2 CAR_3 são as funções de mistura ou interpoladoras da ***Spline Cardial:***

“Cardinal Spline”

Como ficam as CAR_0, CAR_1 CAR_2 CAR_3 - funções de mistura ou interpoladoras da ***Spline Cardial para t=0 e s=1/2:***



Outras Splines

Splines de Catmull-Rom (ou Overhauser) interpolam pontos de controle, de modo similar às splines naturais

As β–splines controlam a forma da curva globalmente através das variáveis β_1 (bias) e β_2 (tensão)

Bias controla influência dos vetores tangentes enquanto que tensão puxa curva para próximo das linhas que conectam os pontos de controle

Computer Graphics C version de D. Hearne e M.P. Baker , p. 345-357

Catmull-Rom spline

Foi proposta por Edwin Catmull and Raphael Rom

Catmull (born March 31, 1945) is an American computer scientist and former president of Pixar and Walt Disney Animation Studios. He has contributed to many important developments in computer graphics

Raphael Rom

is an computer scientist (from Israel) working at Israel Institute of Technilogy.

Recebeu seu Ph.D. in 1975 na Universidade de Utah, ficou conhecidp pelo desenvolvimento da curva que leva seu nome e o de Catmull.

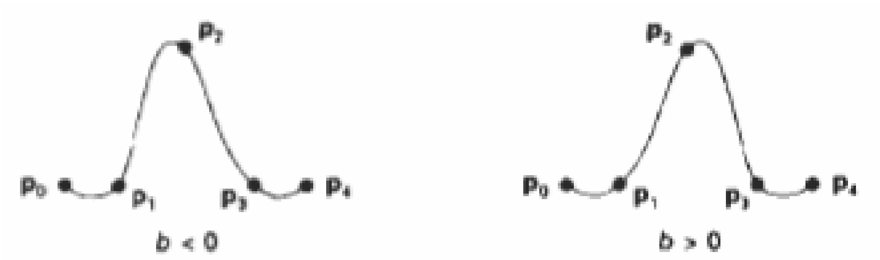
- *Catmull, E, Rom, R. (1974), "A class of local interpolating splines", in Barnhill, R. E.; Riesenfeld, R. F. (eds.), Computer Aided Geometric Design, New York: Academic Press, pp. 317–326.*

Outras Splines

As Korchanek-Bartel splines, são uma classe de Cardinais que além do parâmetro de tensão incluem mais dois:

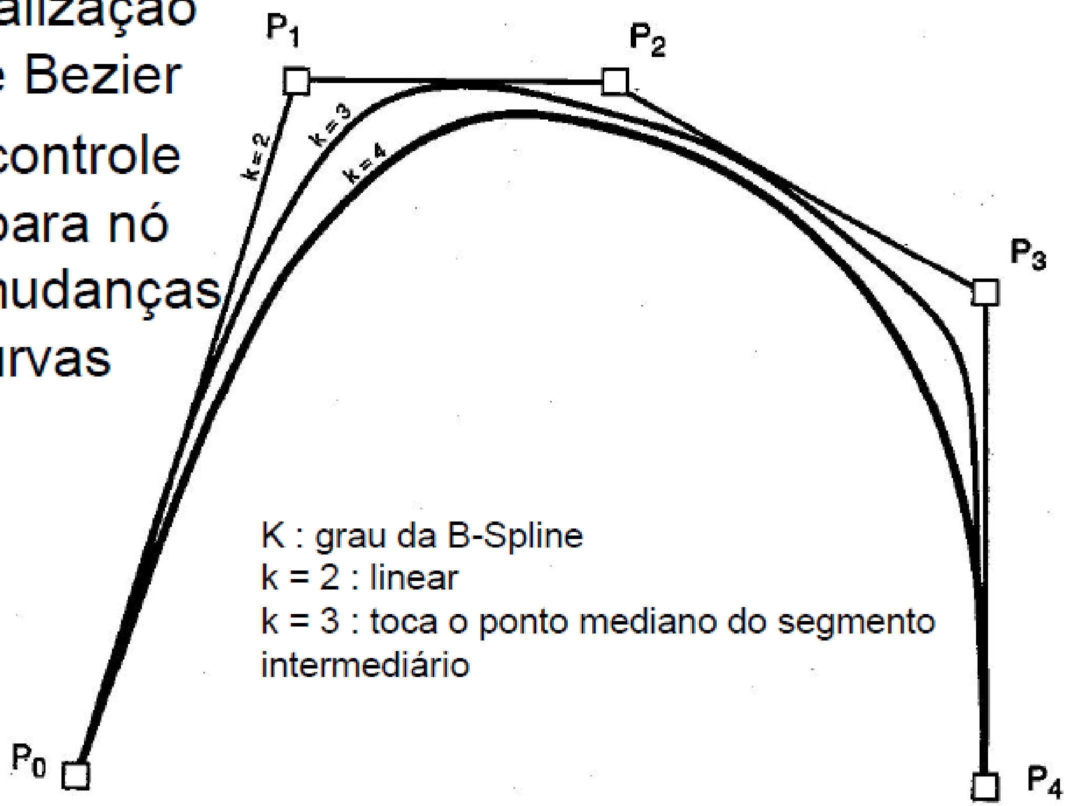
b – bias e c – continuidade

Dando assim ainda mais poder de flexibilidade a interpolação por splines (***Computer Graphics C version*** de D. Hearne e M.P. Baker , p. 325)



B-Splines – é a forma de aproximar por Splines mais usada

- Uma generalização da curva de Bezier
- Pontos de controle adicionais para nó permitem mudanças locais às curvas



Especificando curvas

- Pontos de Controle
  - Um conjunto de pontos que influenciam a forma da curva
- Nós
  - Pontos de controle que estão sobre a curva
- Interpolando Splines
  - Curvas que passam através dos pontos de controle (nós)
- Aproximando Splines
  - Pontos de controle meramente influenciam a forma

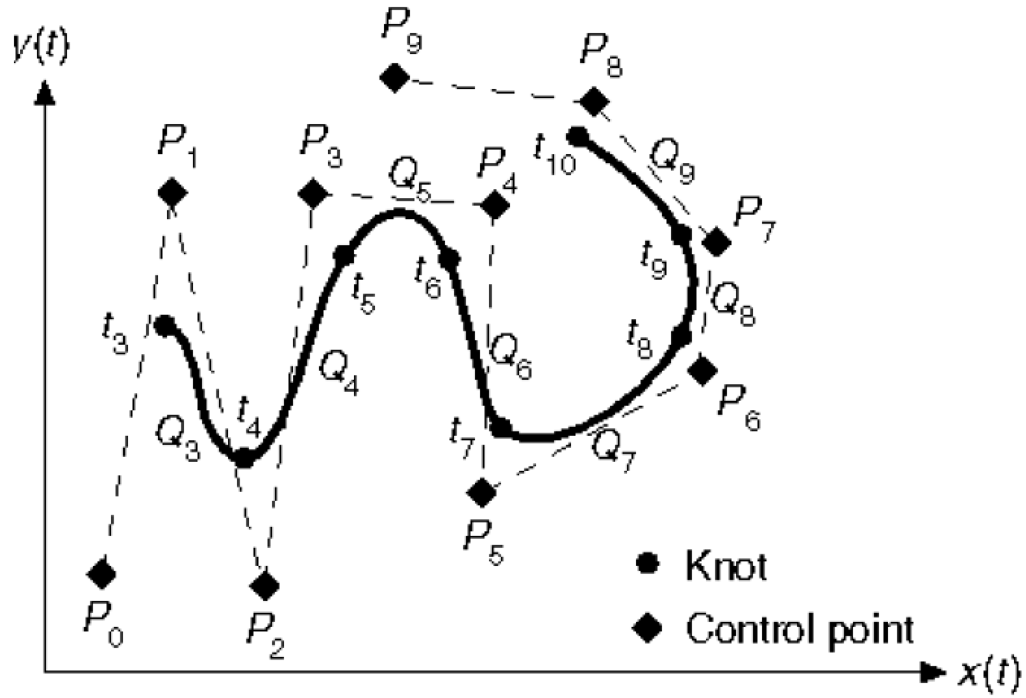
B-spline ou **basis spline**

Caracteristicas.

- o grau do polinomio interpolador é independente do número de pontos de controle , $\boldsymbol{m}$, ***dentro de certos limites***
- Permite **controle local da forma da curva,** pelos $\boldsymbol{p_i}$ pontos de controle .

Computer Graphics C version de D. Hearne e M.P. Baker , p. 334-345

Nós ≠ pontos de controle



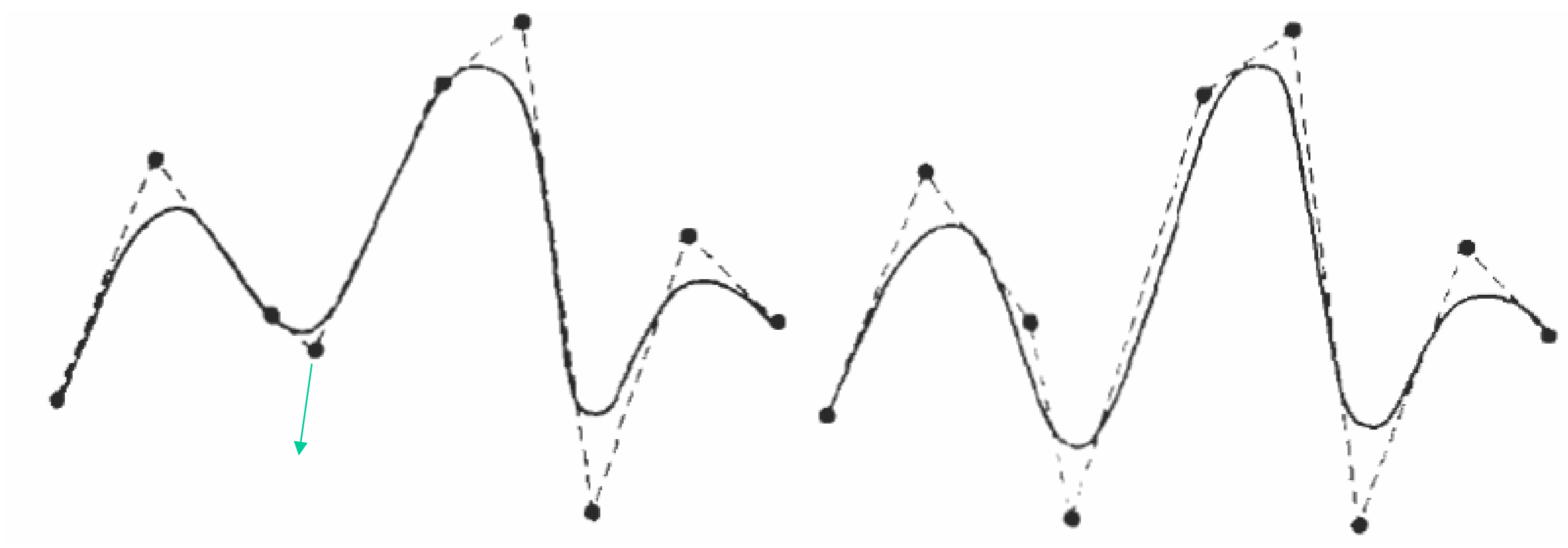
Nós:

No espaço paramétrico global temos **nós** ou **knots** que representam os valores de u onde os segmentos Qi têm os seus extremos. Também são designados por **nós de ligação** uma vez que são os valores de u onde os seg. de curva se unem

Por definição um Qi é definido entre 2 nós consecutivos: Q_i define um intervalo paramétrico $u_i \le u \le u_{i+1}$ (espaço de u global)

B-Spline uniforme: assume-se que esses nós têm valores inteiros e que o espaçamento entre nós é igual a 1 (0, 1, 2,...)

Exemplo controle local



Uma curva B-Spline é calculada por:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{m} B_i(u)p_i \quad \text{em que } ?? \leq u \leq ??$$

- Cada função de mistura B_i é suportada no intervalo

u_i - > u_{i+K}

- Temos m+1 funções de mistura;
- Logo:

m + 1 + k knots (u_0 -> u_{m+k})

Número de nós: nº de pts de cntrl + ordem da curva

Para gerar interpolações lineares, tem-se k=2, e a curva passa a ser descrita pelas funções:

$$N_{i,2}(t) = \left\{ \frac{(t - t_i)}{(t_{i+2} - t_i)} \text{ se } t_i \le t \le t_{i+1} \right.$$

$$N_{i,2}(t) = \left\{ \frac{(t_{i+2} - t)}{(t_{i+2} - t_{i+1})} \text{ se } t_{i+1} \le t \le t_{i+2} \right.$$

Dependendo do vetor de nós escolhido pode-se ter curvas uniformes e periódicas, não periódicas ou não uniformes. Se o desejado for uma B-Spline periódica definida a intervalos iguais de 1 a partir de 0(zero) teremos

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} t \text{ para } 0 \le t \le 1 \\ 2 - t \text{ se } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Para gerar interpolações quadráticas tem-se k=3 e as funções são definidas recursivamente como

$$N_{i,3}(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+2} - t_i)} N_{i,2}(t) + \frac{(t_{i+3} - t)}{(t_{i+3} - t_{i+1})} N_{i+1,2}(t)$$

Onde o valor de $N_{i+1,2}(t)$ pode ser obtido da expressão anterior. Assim se forem usados intervalos iguais de t a partir de zero para o vetor de nós, tem-se:

$$= \begin{cases} 1/2\, t^2 & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ \frac{3}{4} - \left(t - \left(\frac{3}{2} \right) \right)^2 & \text{se } 1 \le t \le 2 \\ 1/2\, (3 - t)^2 & \text{se } 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

- Chamada Uniforme B-splines se têm nós / *knots* que são eqüidistantes uns dos outros em função do parâmetro u.
- Muito usadas em CG são as Cúbicas com ***m+1*** pontos de controle , $P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots P_m$ onde, $m \geq 3$

- Polinômios Cúbicos
  - $f(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$
  - u: (0 <= u <= 1)

As funções de interpolação cúbica (k=4) para o mesmo conjunto de nós (periódicos e uniformes) serão:

$$N_{i,4}(t) = \begin{cases} 1/6\, t & 0 \le t \le 1 \\ 2/3 - 1/2(t-2)^3 - (t-2)^2 & 1 \le t \le 2 \\ 2/3 - 1/2(t-2)^3 - (t-2)^2 & 2 \le t \le 3 \\ 1/6\,(4-t)^3 & 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

Do mesmo modo pode-se recursivamente gerar qualquer tipo de B-Spline, não periódico ou não uniforme apenas escolhendo adequadamente os vetores de nós.

Definida por quatro pontos de controle (P_1, P_2, P_3, P_4).

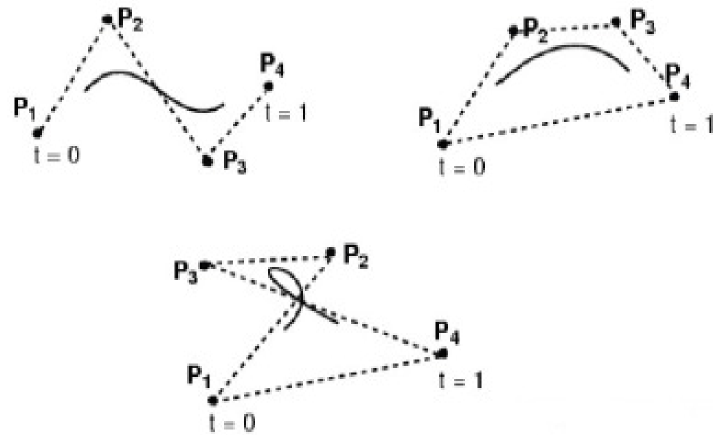
Não passa por nenhum ponto de controle.

– Curva de aproximação

Mais suave que as anteriores

– Mais fácil garantir continuidade paramétrica

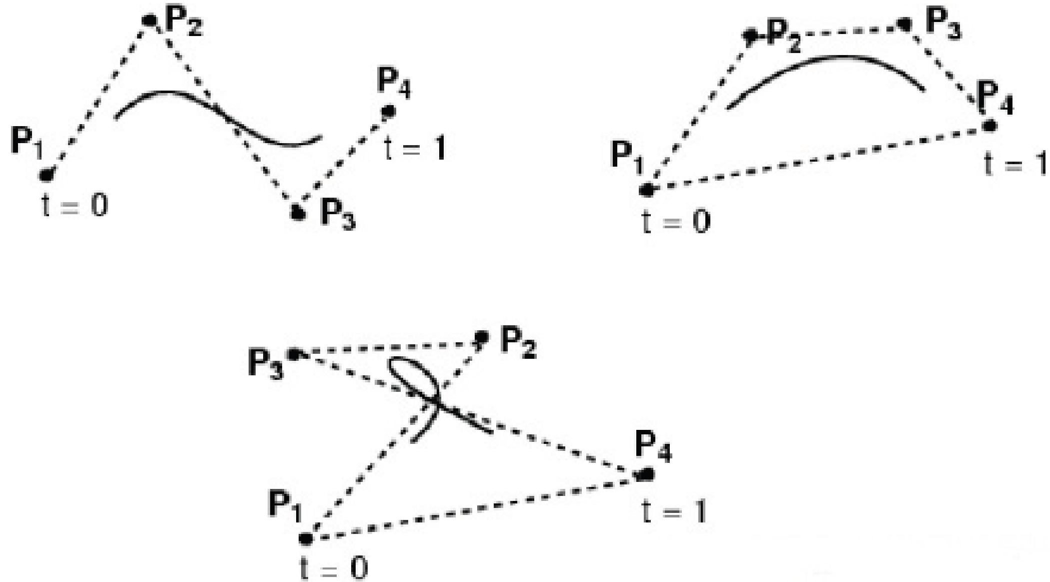
Controle local.



Porque são melhores? Porque fornecem **suporte local** e mais controle (ao contrário da Bézier que por mínima mudança nos pontos de controle, gera uma nova curva)

Genericamente:

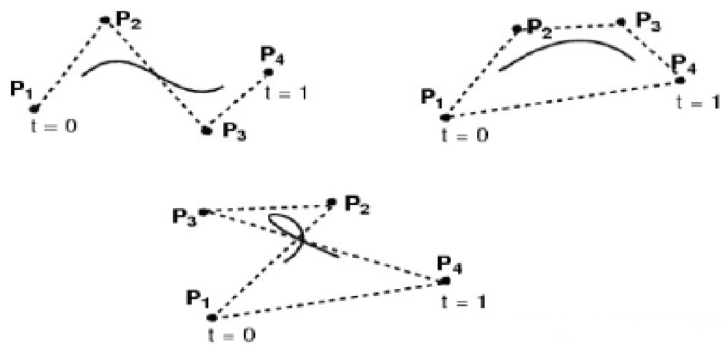
- Para m+1 pontos de controle
  - M>=3 P0,P1,..,Pn
- Teremos curvas com m-2 segmentos
  - Q3,Q4,..,Qm



A curva inteira B-spline é considerada composta por segmentos de curvas **spline**

Cada segmento é definido por 4 pontos, cada ponto influencia 4 segmentos de curva (exceto P0 e Pn)

Knots são os pontos de junção entre os segmentos de curva



B-Splines Uniformes

- Significa que a variável paramétrica está espaçada em intervalos uniformes (t=0.1, 0.2, 0.3, etc)
- Cada um dos *m-2* segmentos é definido por 4 dos *m+1* pontos de controle
- Segmento $Q_i = P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$
- $GS=[P_{i-3}\ P_{i-2}\ P_{i-1}\ P_i]$ $3<=i<=m$

Spline controlada por 4 pontos

$$Q_i(u) = \sum_{j=0}^{3} B_{i-j}(u) p_{i-j}$$

$$B_i = \frac{1}{6} u^3$$

$$B_{i-1} = \frac{1}{6}\left(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1\right)$$

$$B_{i-2} = \frac{1}{6}\left(3u^3 - 6u^2 + 4\right)$$

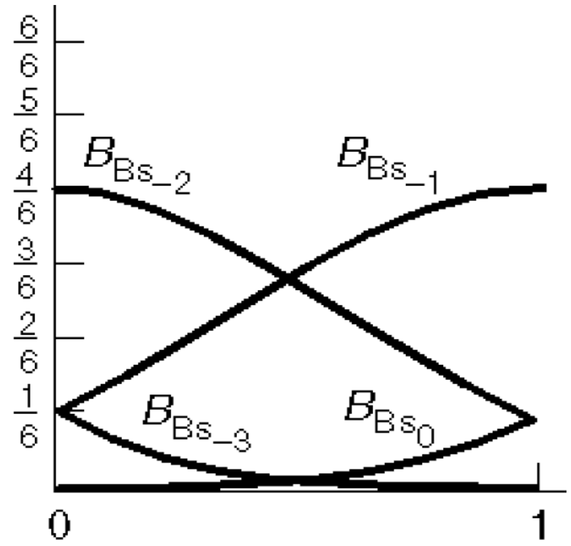
$$B_{i-3} = \frac{1}{6}\left(1 - u\right)^3 \quad \text{com} \quad 0 \le u \le 1$$

Representação matricial

1/6

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Funções de mistura da cubica uniforme anterior

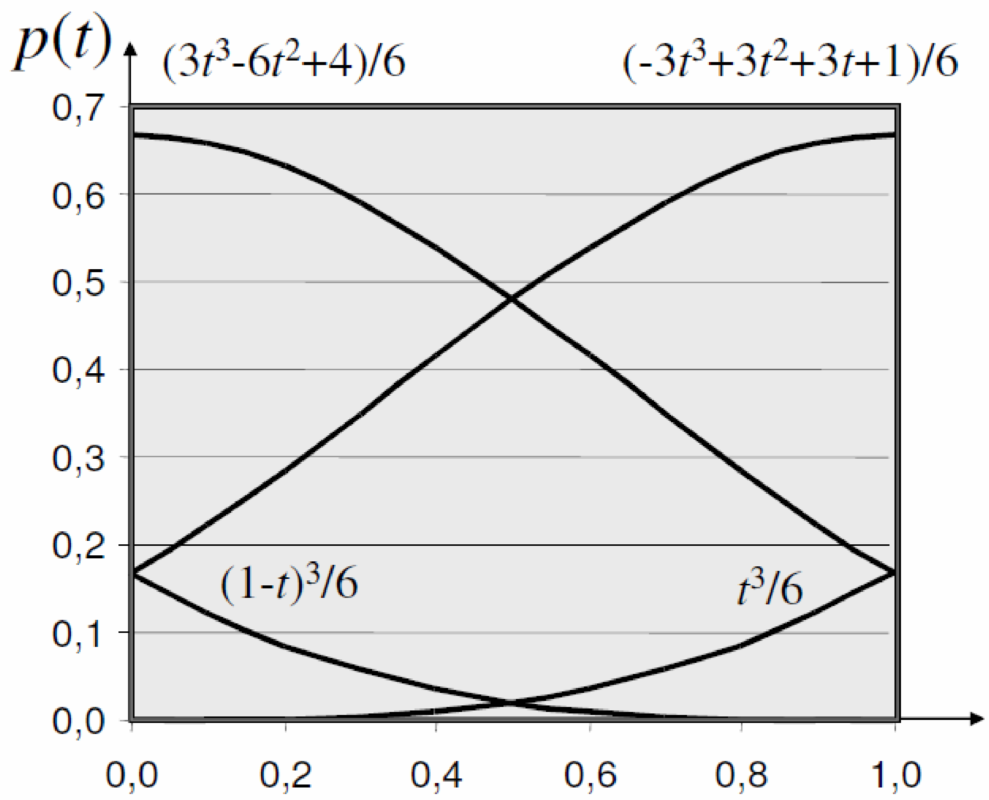


B-Splines Uniformes

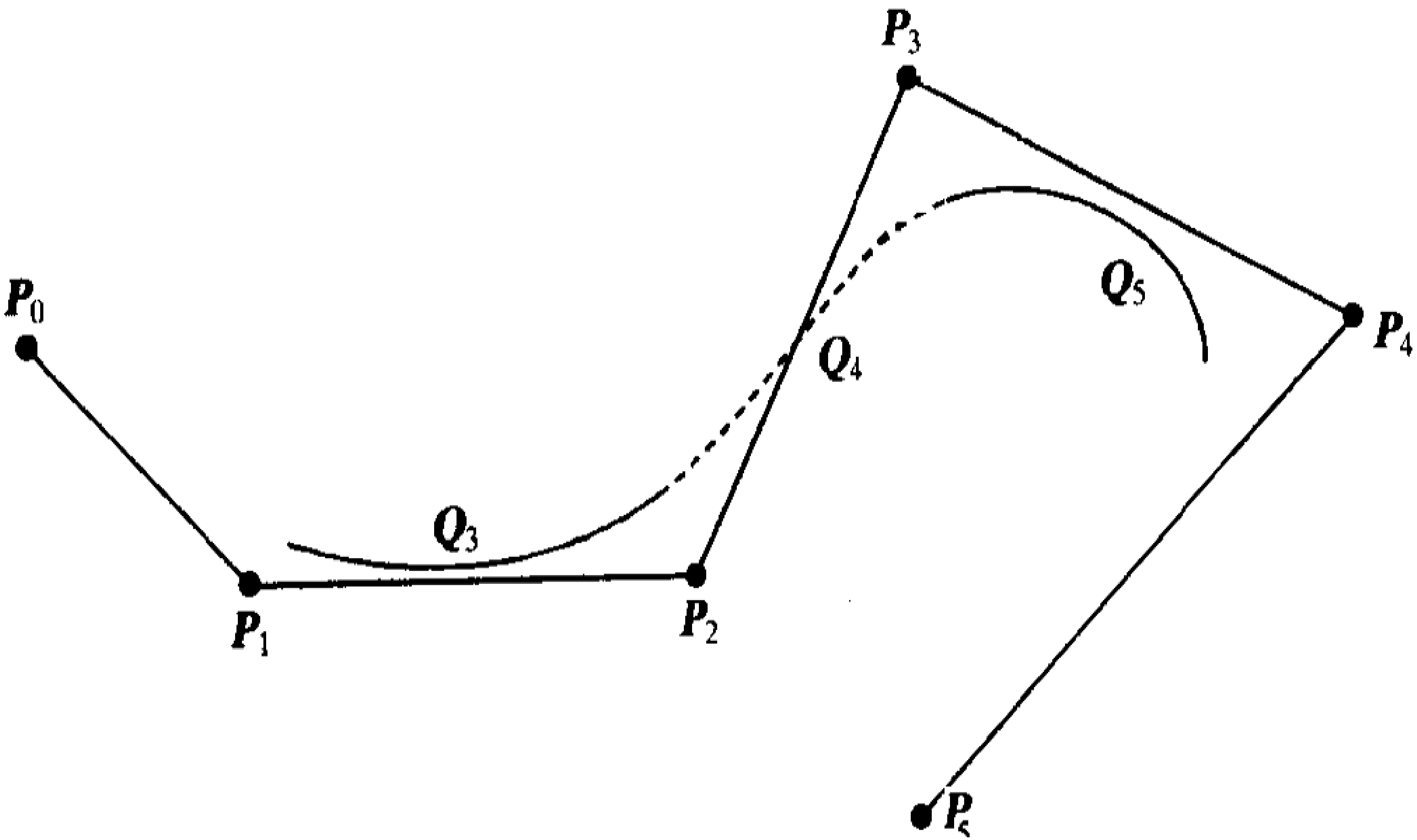
$$Q_{BS}(t) = \frac{(1-t)^3}{6}P_{i-3} + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6}P_{i-2} +$$

$$\frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6}P_{i-1} + \frac{t^3}{6}P_i$$

$$0 <= t <= 1$$

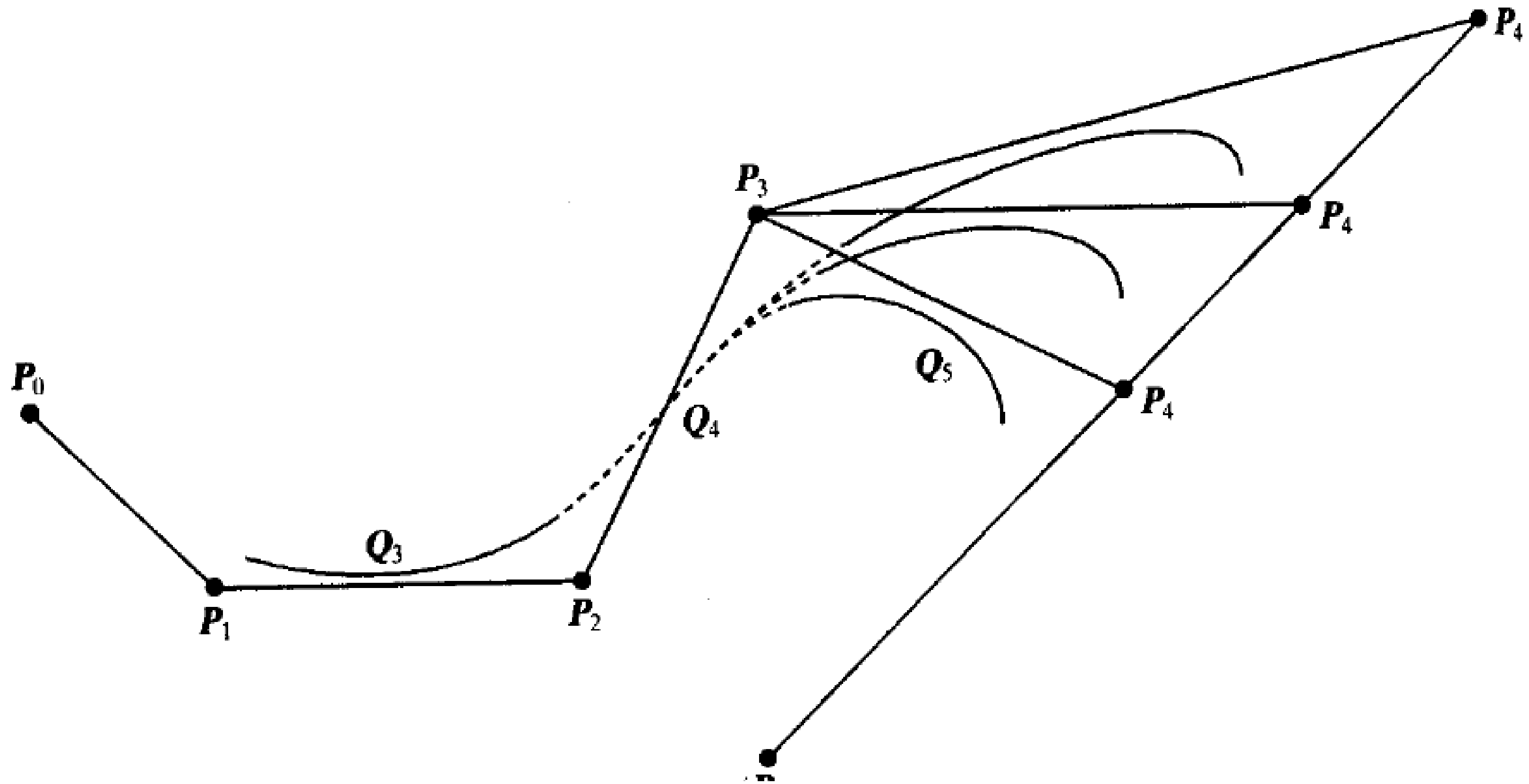


Unido 3 curvas B-Splines



Exemplo de controle local:

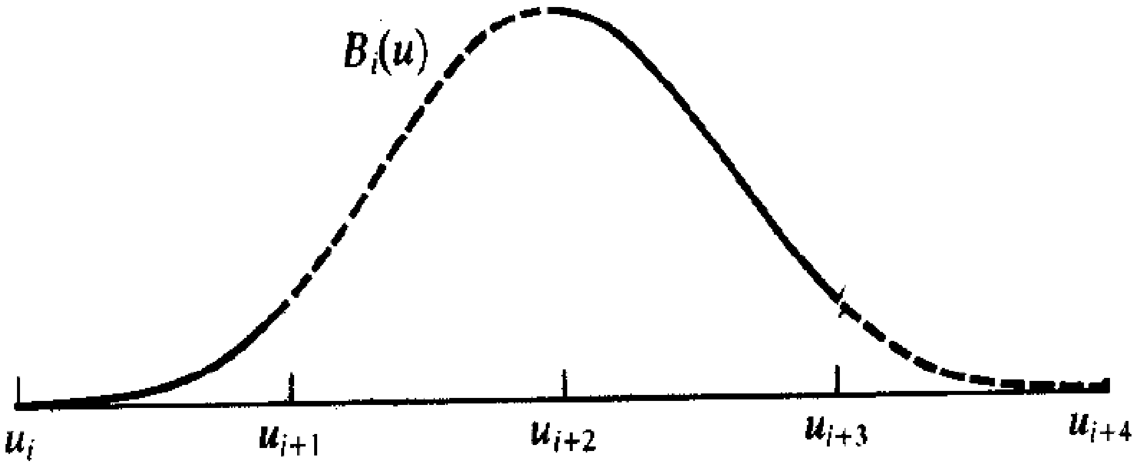
Alterando o penúltimo ponto, não se altera o trecho inicial e só parte do trecho intermediário



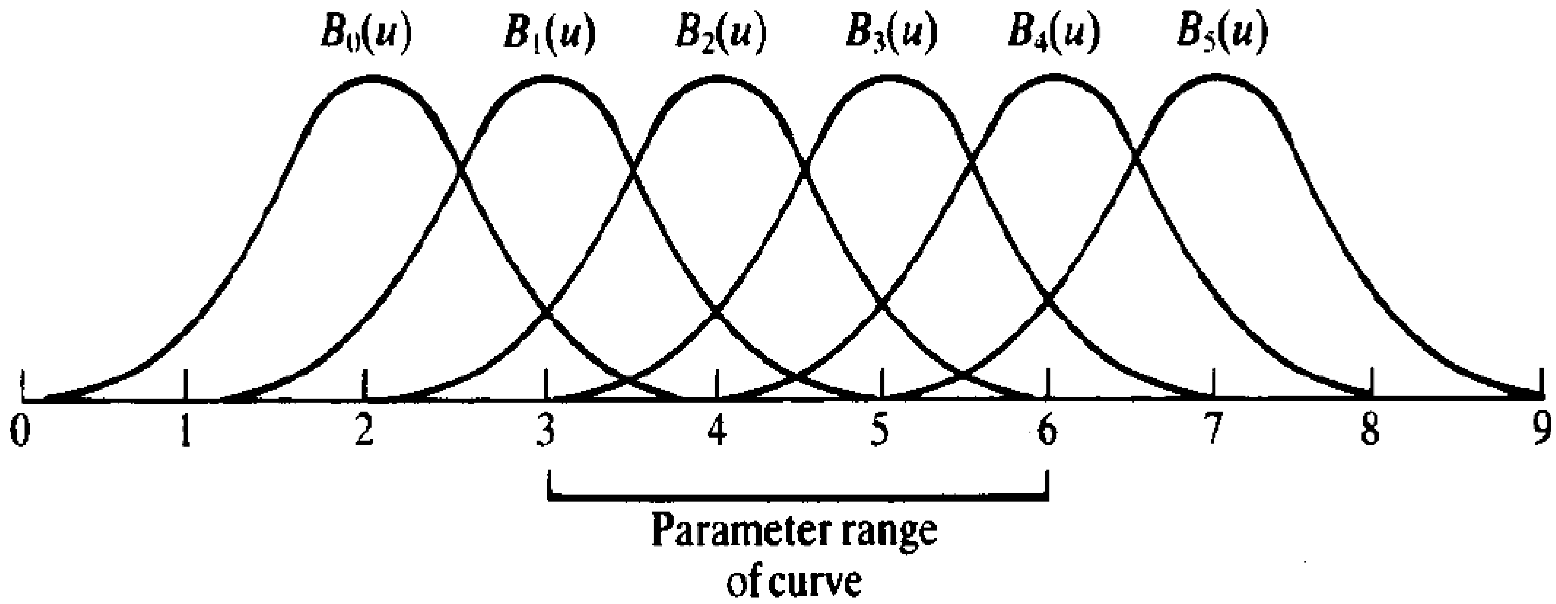
Ao ser controlada por 4 pontos, só se aproxima dos 2 centrais

Cada função de base "cobre" K intervalos

Curva B-Spline ordem 4: cada função de base é, ela própria, uma B-Spline cúbica, constituída por 4 segmentos, e simétrica



Periódicas uniformes



Exemplo: curva cúbica com 6 pts de cntrl (m=5 e K=4)

Nós uniformemente espaçados (vector de nós uniforme): cada função de base é uma cópia transladada de um nó (funções de base periódicas).

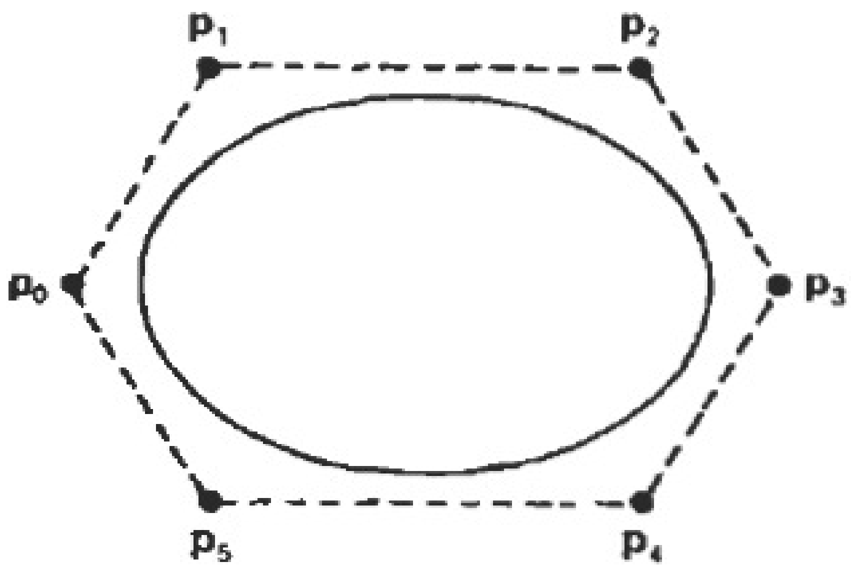
Número total de nós: 10

Uma curva B-Spline é calculada por:

Para criar uma curva spline fechada:

Apenas se repete no final das seqüência dos pontos de controle da curva os 3 pontos iniciais

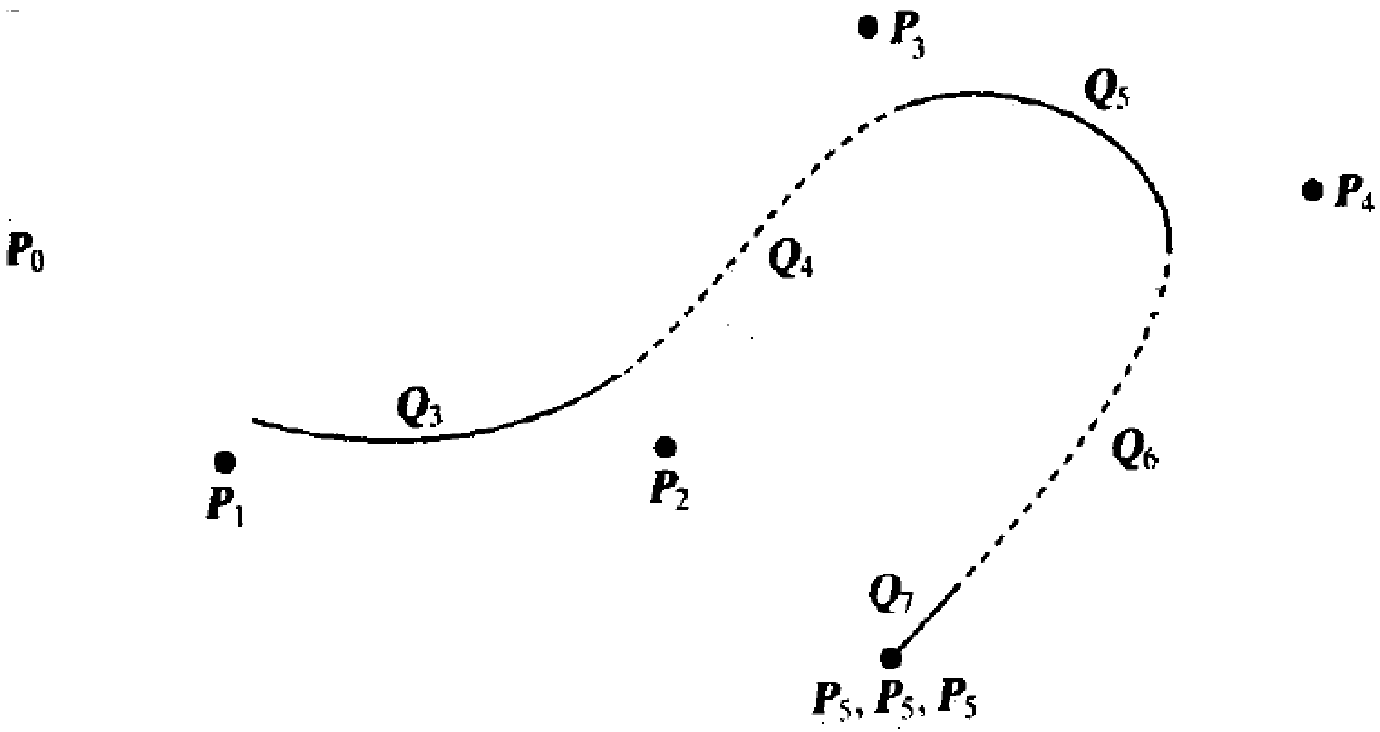
P_0, P_1, P_2, P_3 .... $.P_m, P_0, P_1, P_2$



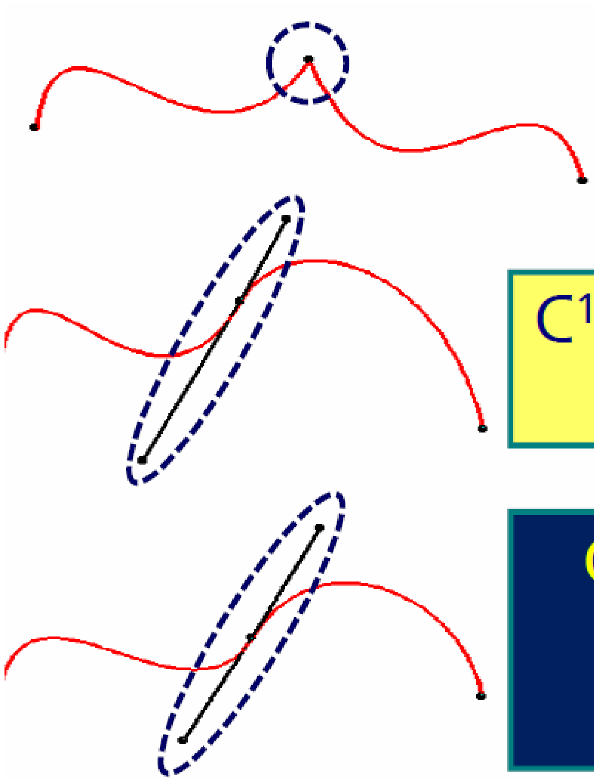
Spline com pontos controle coincidentes seguidos =>
Ela acaba por passar pelo ponto

Três P_5 coincidentes: 8 pts de controlo, 6 Q_i, $3 \leq u \leq 8$

Q_7 ($7 \leq u \leq 8$) determinado por $P_4P_5P_5P_5$. Em u=8 interpola P_5



Lembrando o significado de continuidade

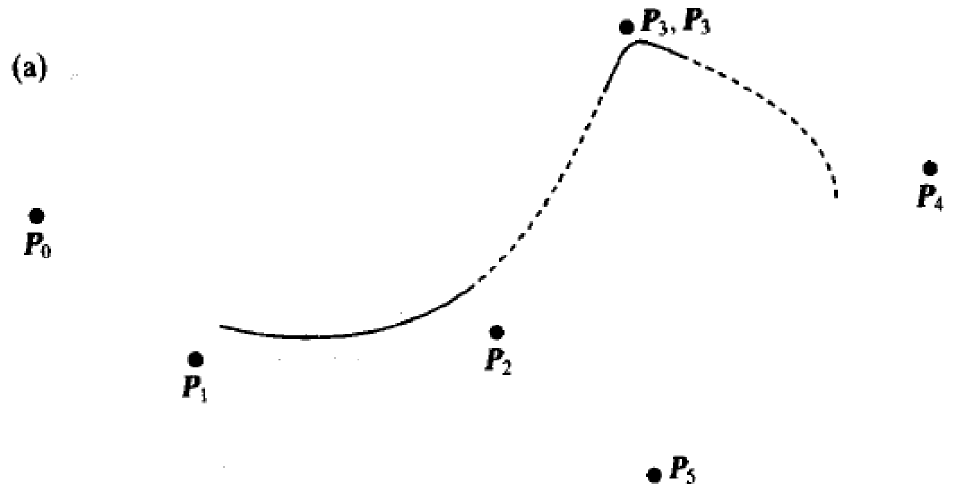


C^0: As duas curvas apresentam um ponto de junção.

C^1: A direção dos vetores tangentes no ponto de junção é igual.

C^2: A direção e a magnitude dos vetores tangentes no ponto de junção são iguais.

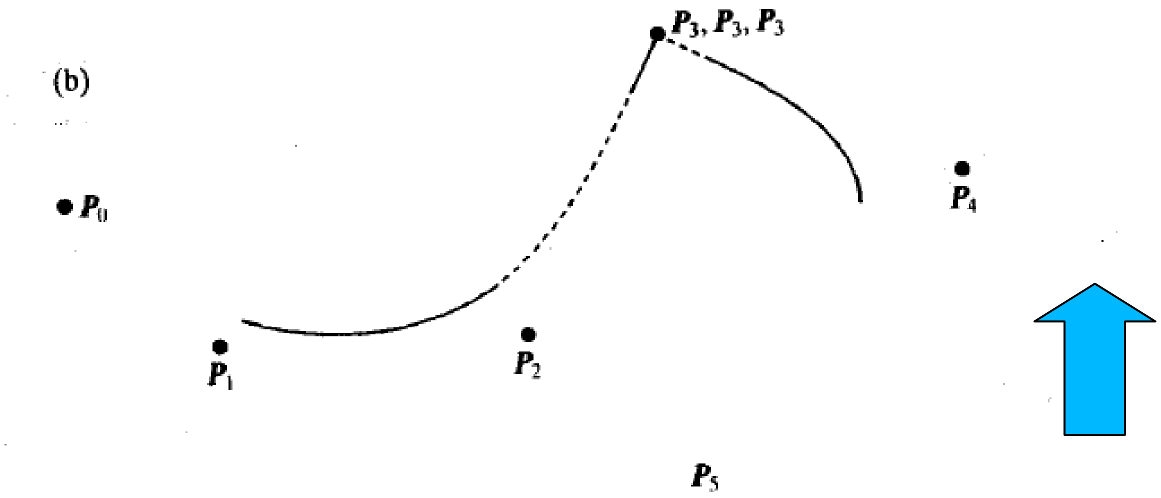
Spline com pontos controle coincidentes seguidos =>
Ela acaba perdendo niveis de continuidade



Perda de continuidade

a) ponto duplo -G1

b) Ponto triplo - G0



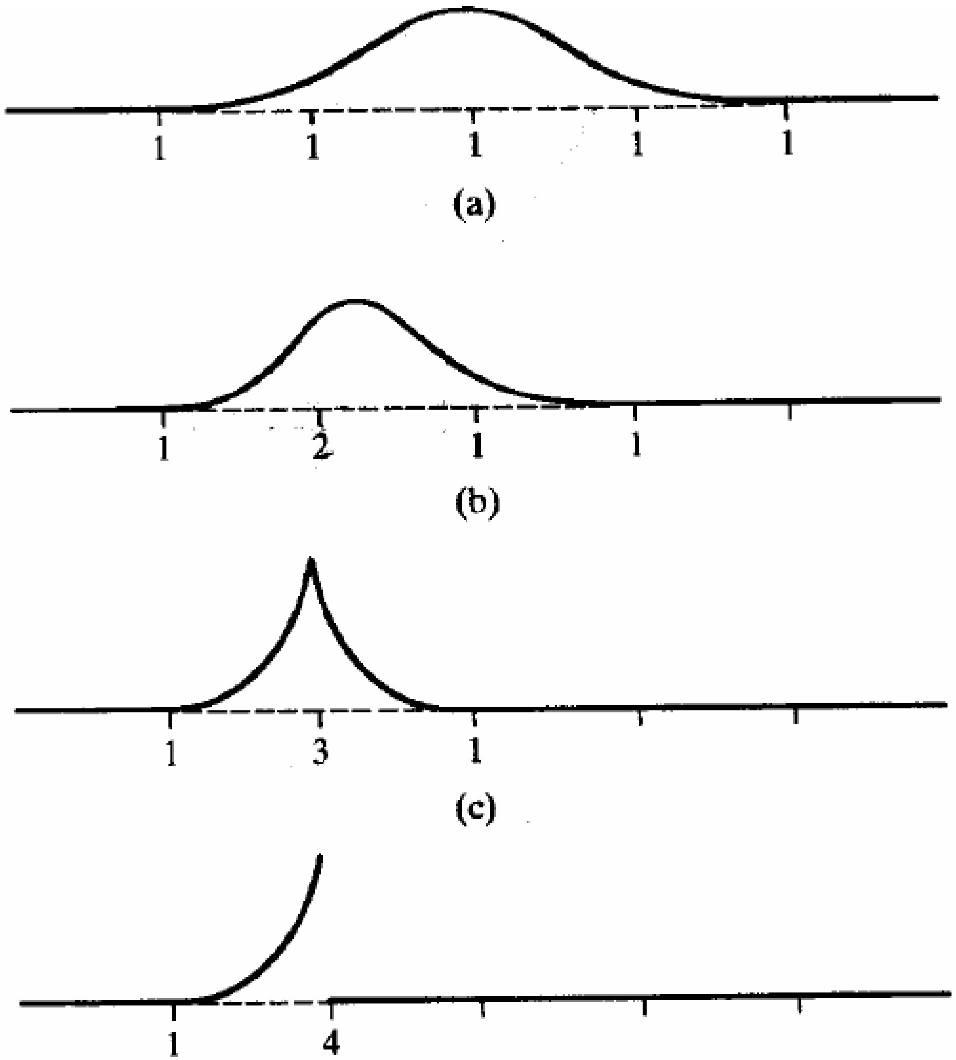
Spline : efeito das multiplicidades dos pontos de controle ou coincidencias dos mesmos nas funções de base

a) Multiplicidade 1:
[0, 1, 2, 3, 4]

b) Multiplicidade 2:
[0, 1, 1, 2, 3]

c) Multiplicidade 3:
[0, 1, 1, 1, 2]

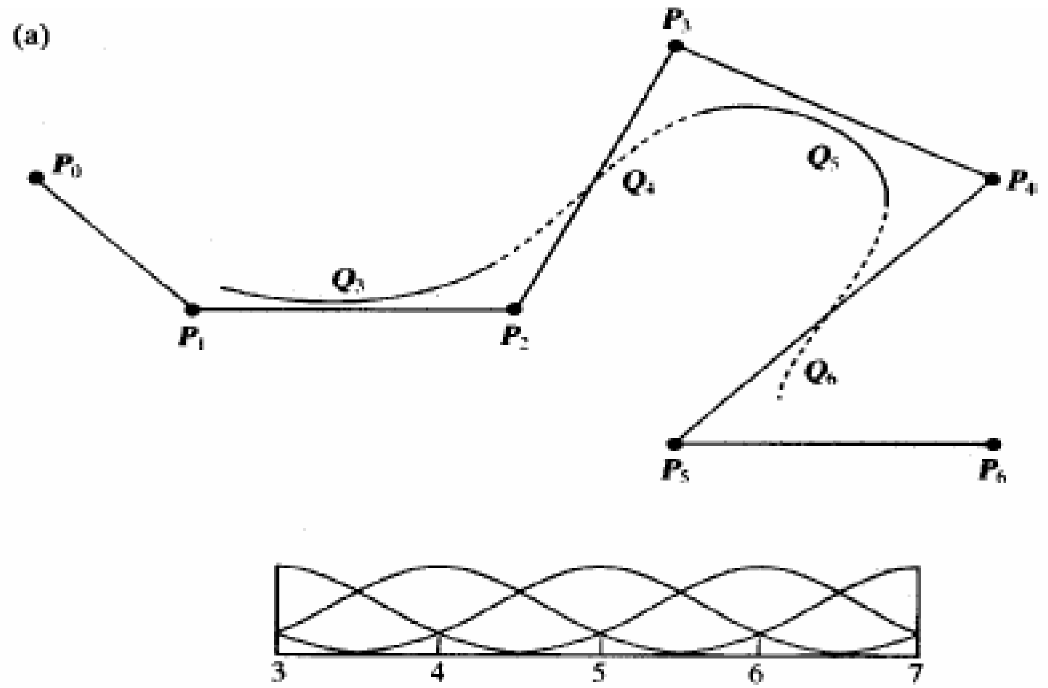
d) Multiplicidade 4:
[0, 1, 1, 1, 1]



Propriedades

- Aumentar a multiplicidade m de um knot reduz a continuidade da paramétrica k-m-1;
- Um knot interior de multiplicidade k transforma uma B-spline em duas B-Splines distintas cada um com o seu conjunto de pontos de controlo.

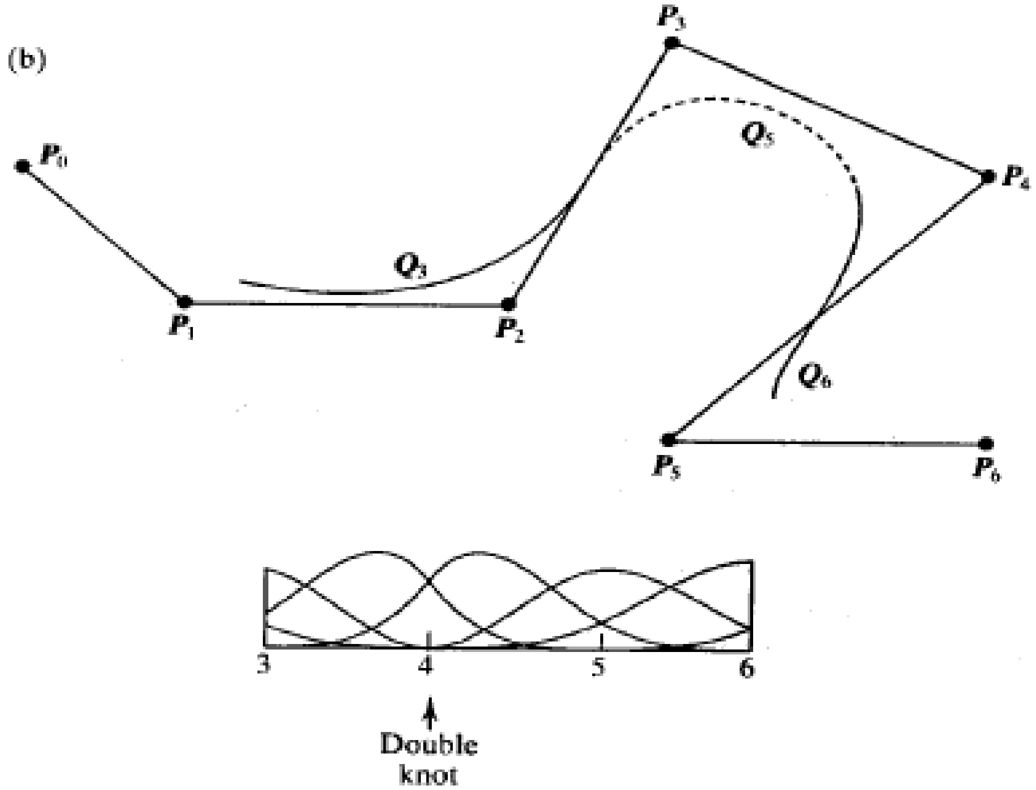
Spline => propriedades



The effect of interior knot multiplicity on a B-spline curve.

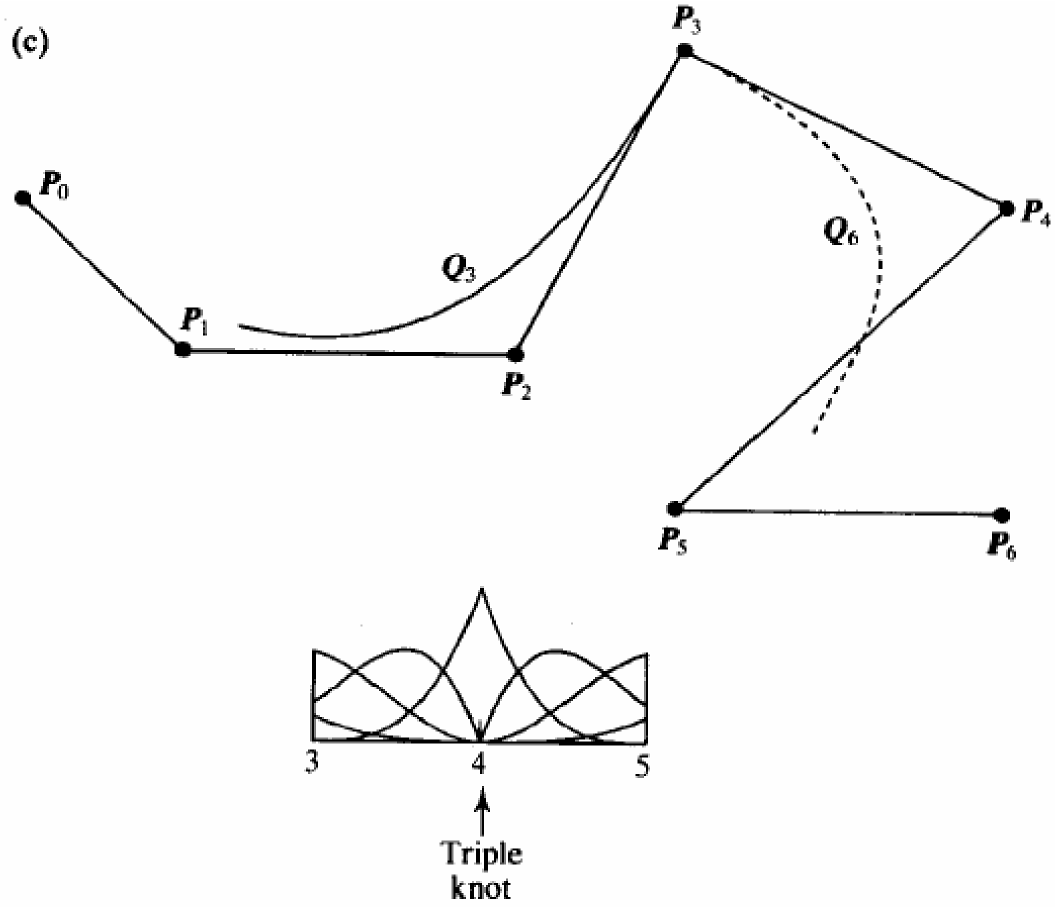
(a) A four-segment B-spline curve. The knot vector is [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]. All B-splines are translates of each other.

Spline com pontos controle
coincidentes seguidos =>
perda nivel de continuidade



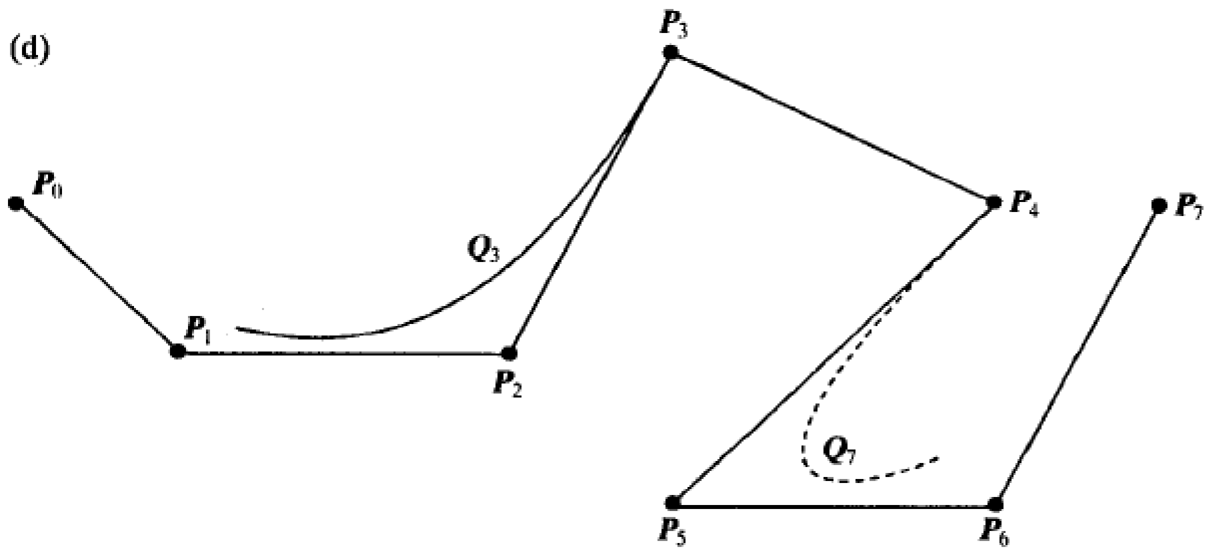
(b) Knot vector is
[0,1,2,3,4,4,5,6,7,8,9].
Q_4 shrinks to zero.

Spline com pontos controle coincidentes seguidos

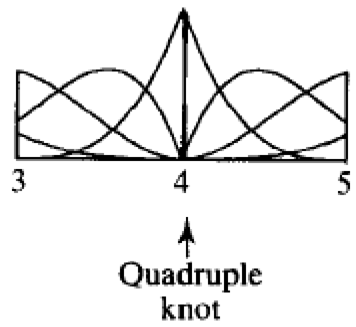


(c) **Knot vector is** [0,1,2,3,4,4,4,5,6,7,8]. $\boldsymbol{Q_4}$ and $\boldsymbol{Q_5}$ shrink to zero. Continuity between $\boldsymbol{Q_3}$ and $\boldsymbol{Q_6}$ is positional.

Spline com pontos controle coincidentes seguidos



(d) Knot vector is [0,1,2,3,4,4,4,4,5,6,7,8]. The curve reduces to a single segment Q_3. Another control point has been added to show that the curve now 'breaks' between P_3 and P_4.



B-Splines Não-Uniformes

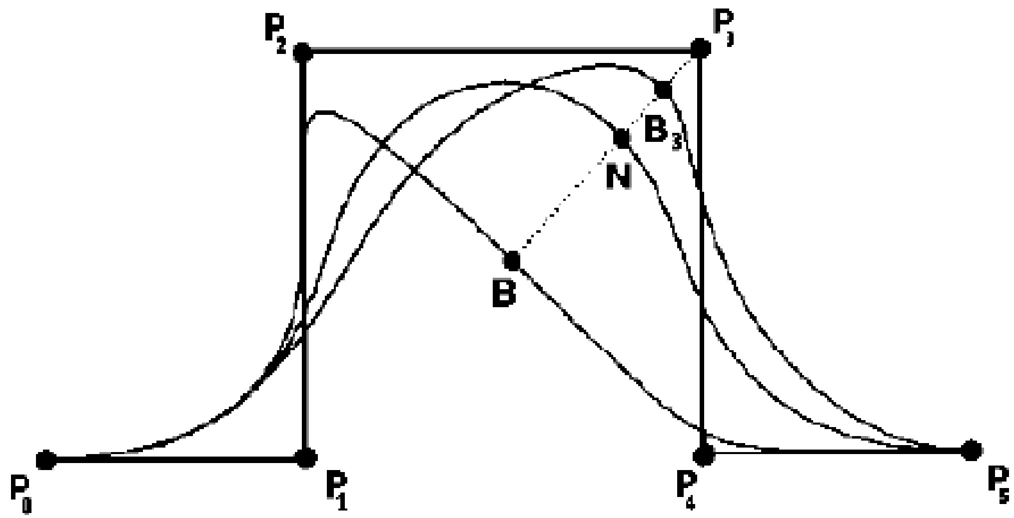
- O intervalo entre valores da variável paramétrica não é necessariamente uniforme…

- Logo as funções de *blending* não são as mesmas para cada segmento…. Maior flexibilidade

Funções de mistura

NURBS

- Non-Uniform Rational B-Spline
- O peso dos pontos de controle é a diferença



NURBS

- ***Non-uniform rational B-splines***
- B-spline não-uniforme racional
- *Rational* significa que os segmentos de curva são expressos por razões entre polinômios cúbicos

Computer Graphics C version de D. Hearne e M.P. Baker , p. 357-349

Curvas Rational B-Spline

- Provê uma única forma matemática precisa capaz de representar as formas analíticas comuns
- Linhas, planos, curvas cônicas incluindo círculos, curvas de forma livre, superfícies quádricas e esculpidas

São invariantes a rotação, translação, scaling e transformações perspectivas

Curvas racionais

A curva Rational cúbica é dada pelas seguintes razões:

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)}, y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)}, z(u) = \frac{Z(u)}{W(u)}$$

Onde X(u), Y(u), Z(u) e W(u) são curvas cúbicas polinomiais cujos pts. de ctrl são definidos em coordenadas homogéneas.

Curva no espaço homogéneo:

$Q(u) = [X(u) \quad Y(u) \quad Z(u) \quad W(u)]$

Para desenhar uma :

Spline 2D em qualquer linguagem , se a geração de segmentos de curvas que sejam controladas por 4 pontos dados de maneira uniforme, é equivalente a implementar a equação:

$$Q_{BS}(t) = \frac{(1-t)^3}{6} P_{i-3} + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} P_{i-2} +$$

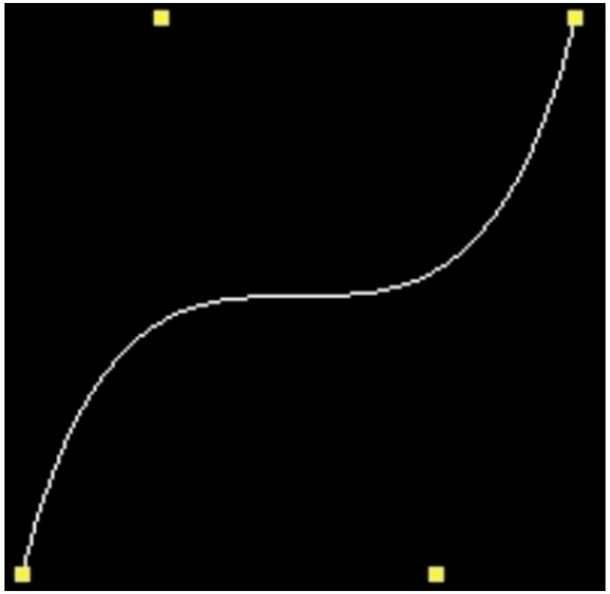
$$\frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} P_{i-1} + \frac{t^3}{6} P_i$$

$$0 <= t <= 1$$

Usuário fornece os pontos X[i],Y[i] e:

```
i = 0;
while(i+3 < TotMarks) { //TotMarks = número total de pontos na curva
   RangeX = fabs (X[i+2] - X[i+1]);
   RangeY = fabs (Y[i+2] - Y[i+1]);
   if(RangeX > RangeY) Step = 1.0/RangeX;
   else Step = 1.0/RangeY;

   for(t = 0; t <= 1; t += Step) {
      x = (((-1*pow(t,3) +3*pow(t,2) -3*t +1)*X[i]   +
            ( 3*pow(t,3) -6*pow(t,2) +0*t +4)*X[i+1] +
            (-3*pow(t,3) +3*pow(t,2) +3*t +1)*X[i+2] +
            ( 1*pow(t,3) +0*pow(t,2) +0*t +0)*X[i+3])/6);
      y = (((-1*pow(t,3) +3*pow(t,2) -3*t +1)*Y[i]   +
            ( 3*pow(t,3) -6*pow(t,2) +0*t +4)*Y[i+1] +
            (-3*pow(t,3) +3*pow(t,2) +3*t +1)*Y[i+2] +
            ( 1*pow(t,3) +0*pow(t,2) +0*t +0)*Y[i+3])/6);
      if(t == 0) MoveTo (hdc, x, y);
      else LineTo (hdc, x, y);
   }
   i++;
}
```



Bibliografia

- Abel Gomes, Irina Voiculescu, Joaquim Jorge, Brian Wyvill, Callum Galbraith **Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms**, Springer, 2009
- **"Computer Graphics: Principles and Practice",** Foley,van Dam, Feiner and Hughes; Capítulo 11
- **"3D Computer Graphics",** A. Watt, Capítulo 6