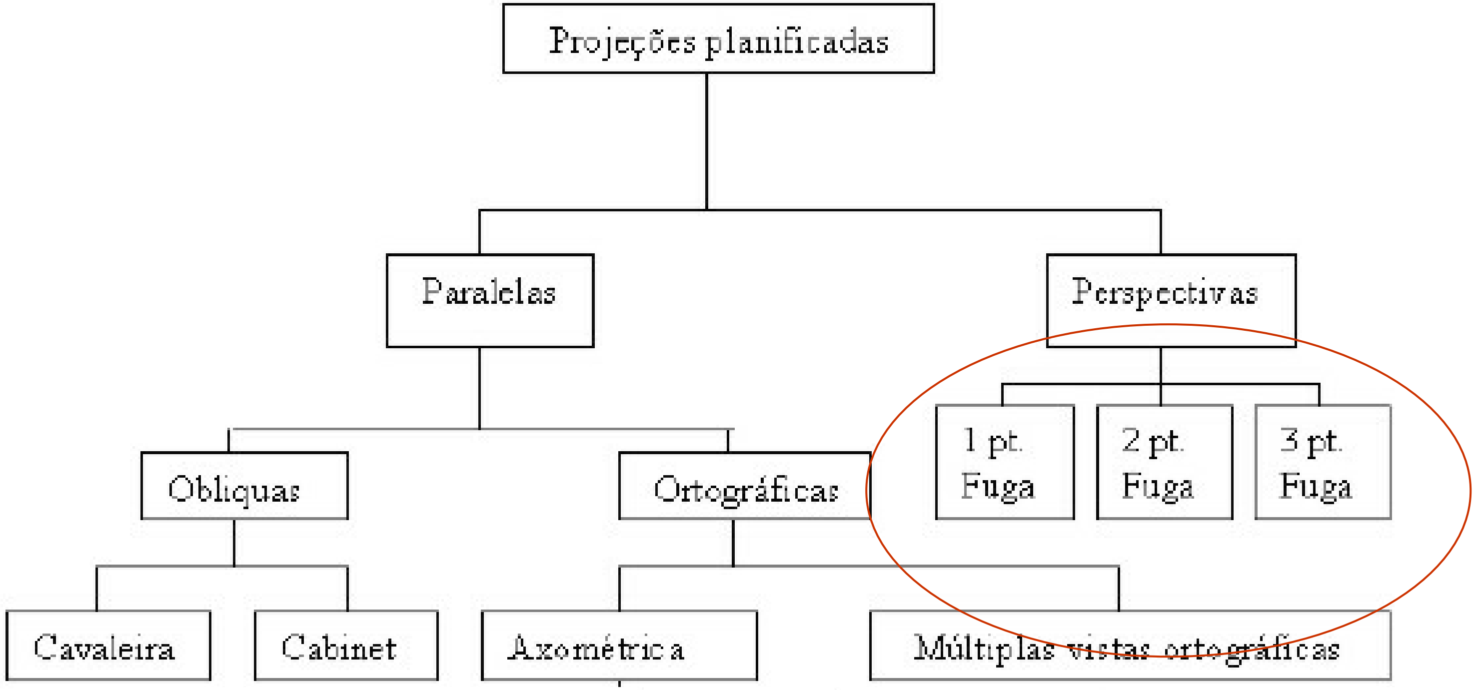
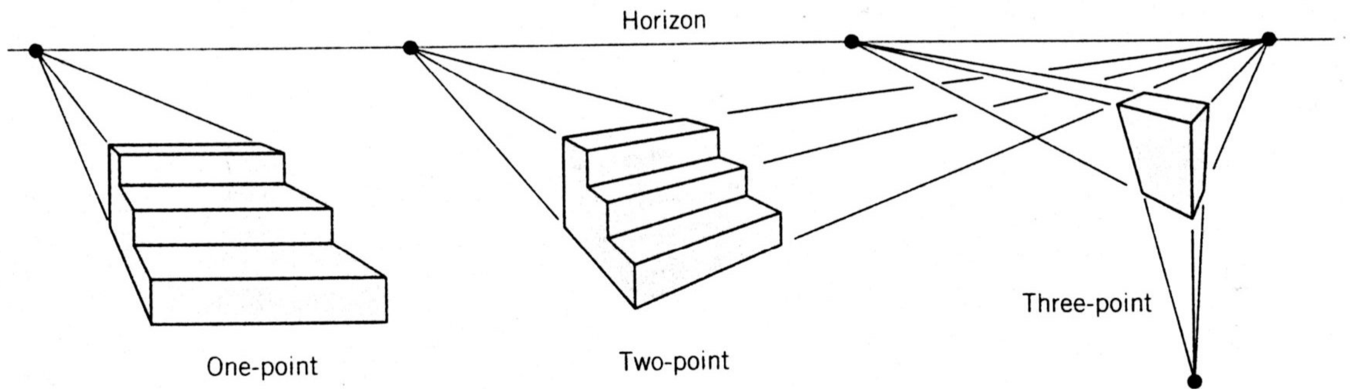
Perspectivas

Cap 2 (do livro texto)

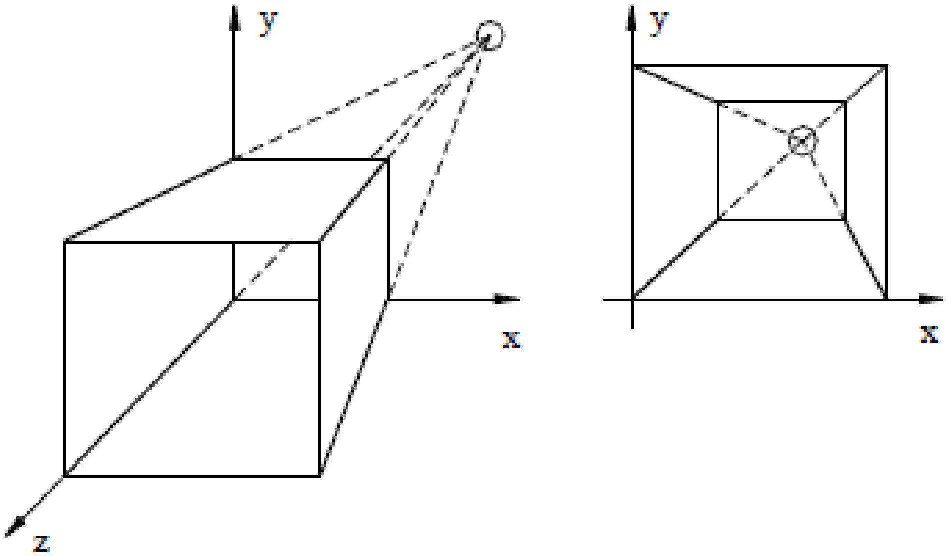
Aula 7 – UFF - 2014


Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Obliquas
Ortográficas
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas


Horizon
One-point
Two-point
Three-point

Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.



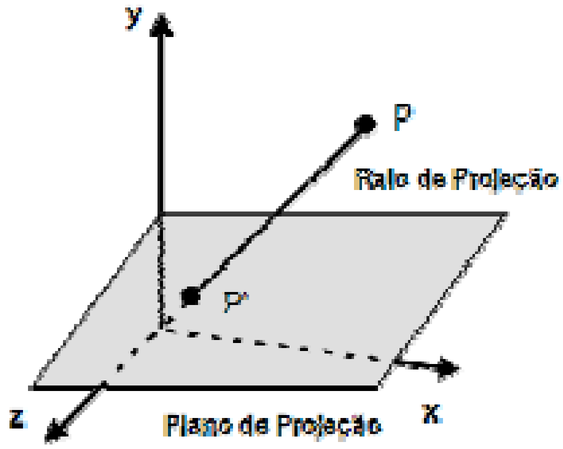
Características

- Projeções Perspectivas
  - Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
  - Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
  - Os raios projetores não podem ser paralelos.
  - Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
  - São mais realísticas na representação de objetos;
  - Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;

Projeções Planas:

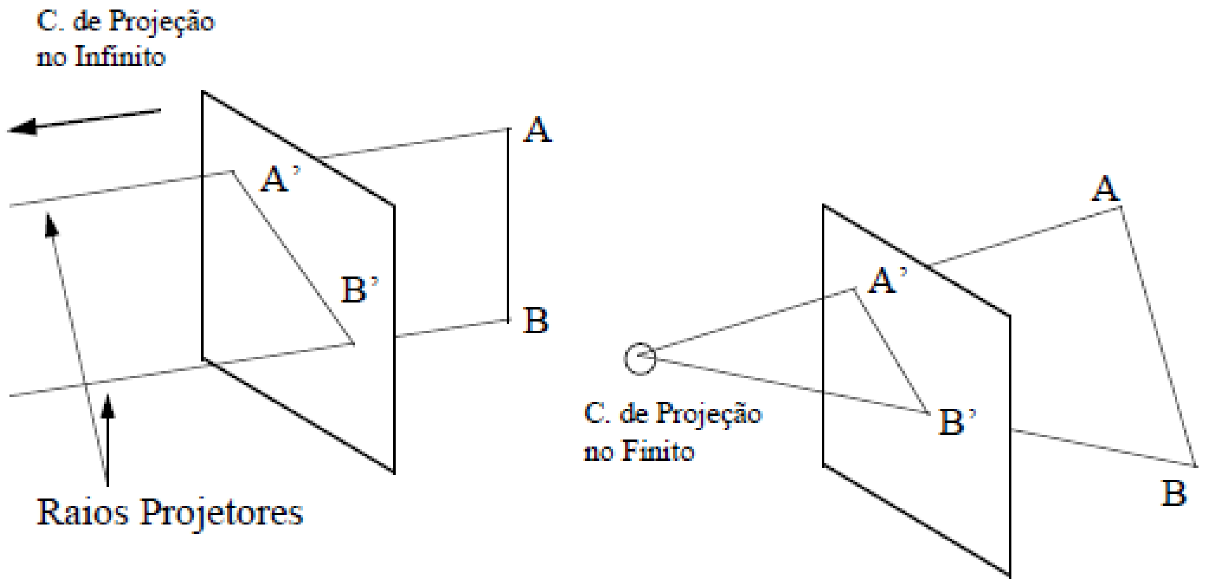
Elementos básicos:

- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.



Classificação básica:

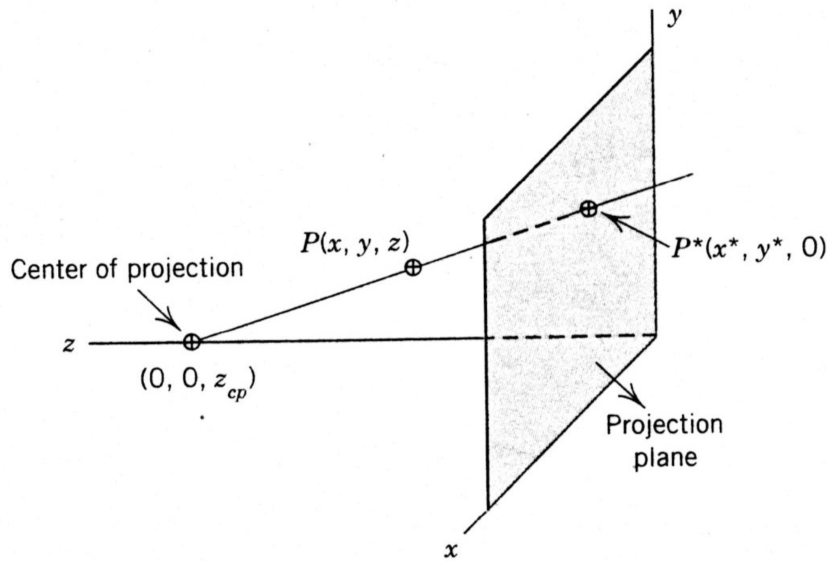
- Projeções paralelas e projeções perspectivas



Considerando *P (x , y , z)*

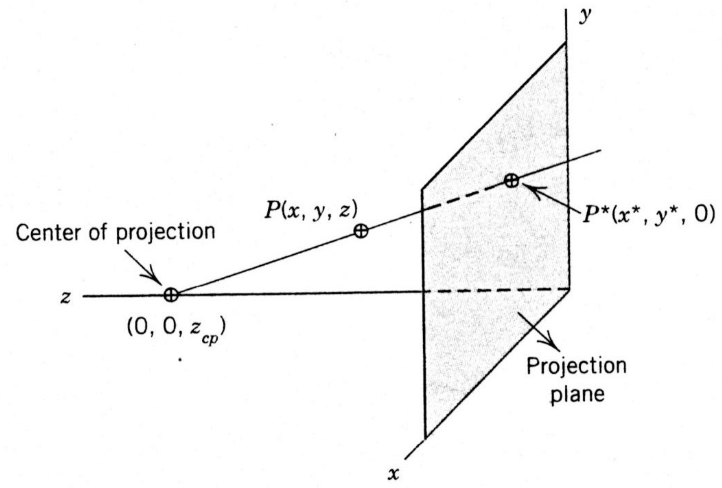
Qual sua relação com sua **projeção** no plano ***z*=0** a partir de um **raio projetor no eixo *z*** $(0 , 0 , z_{cp})$?

$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$



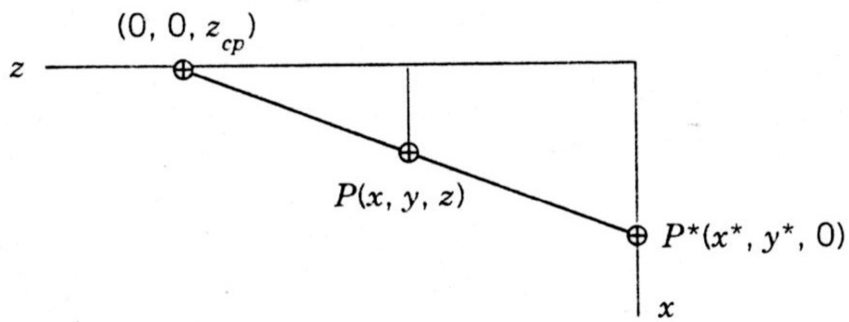
P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Considerando
plano *zx* ,
ou $y = 0$



Por semelhança de triângulos

$$\frac{x^*}{x} = \frac{z_{cp}}{z_{cp} - z}$$



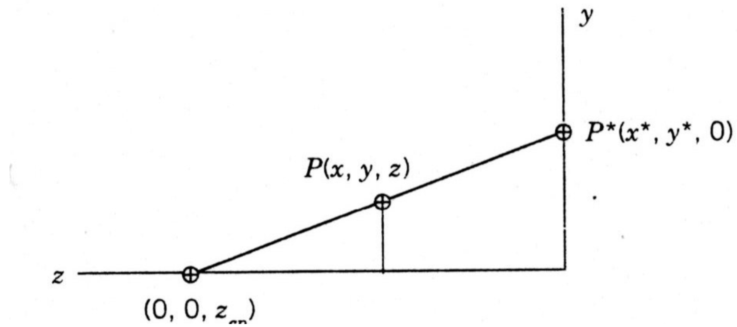
Organizando:

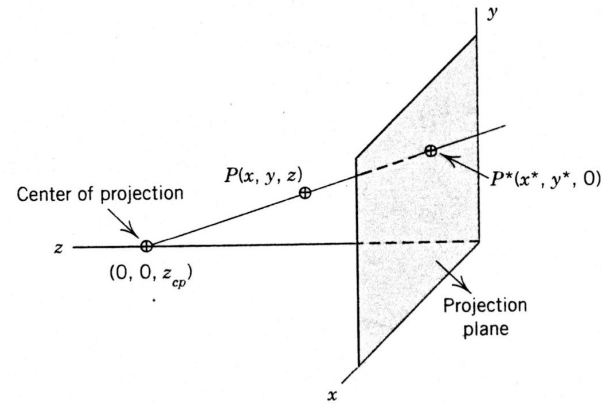
$$x^* = \frac{x}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

$P\ (x, y, z) \leftrightarrow P^*\ (x^*, y^*, 0)$

Considerando

plano *zy* .





Por semelhança de triângulos :

$$\frac{y^*}{y} = \frac{z_{cp}}{(z_{cp} - z)}$$

Organizando

$$y^* = \frac{y}{1 - \dfrac{z}{z_{cp}}}$$

P (x , y , z) ↔ P* (x*, y*, 0)

Organizando matricialmente:

$$P^* = [x^* \quad y^* \quad 0 \quad 1] = \left[\frac{x}{\left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)} \quad \frac{y}{\left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right)} \quad 0 \quad 1 \right]$$

O que equivale a apena mudar a relação de homogeneidade:

$$= \left[x \quad y \quad 0 \quad \left(1 - \frac{z}{z_{cp}}\right) \right]$$

$$= [x \quad y \quad z \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz perspectiva para o **centro** de projeção sobre o eixo *z*

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode ser vista como a concatenação de uma **perspectiva** e uma **projeção ortográfica no plano $z = 0$**

$$[M_{PER}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective transformation}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{orthographic projection}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{perspective projection}}$$

Repare que essa matriz colocou valores $\neq 0$ em uma nova área da nossa matriz de transformação em coordenadas homogêneas !

$$\left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ \hline 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{array}\right]$$

Se com o centro de projeção sobre o eixo z, tivemos valor $\neq 0$ na terceira linha..... Então......

Para uma projeção **sobre o eixo *x***, ou com centro de projeção em $(x_{cp}, 0, 0)$

$$[M_{\text{PER}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

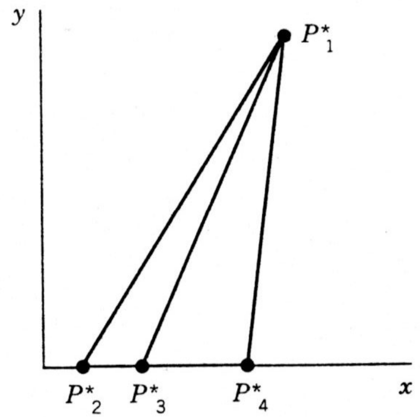
Como um **tetraedro** com os vértices:

$P_1(3,4,0),\ P_2(1,0,4),\ P_3(2,0,5),\ P_4(4,0,3)$

Ficaria?

$$[P^*] = [P][M_{PER}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ \frac{5}{9} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Para uma projeção sobre o eixo y, ou com centro de projeção em (0, y_{cp} , 0)

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resumindo perspectivas com 1 centro de projeção:

sobre:

$$x \text{ axis: } [M_{PER}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y \text{ axis: } [M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{y_{cp}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E sobre z:

$$[M_{PER}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 2 centros de projeção:

É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 2-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elas podem ser consideradas como a concatenação de duas com

1 centro de projeção ! ! !

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter matrizes com 3 centros de projeção:

É só colocar valores não nulos onde apropriado na matriz homogênea ! ! !

For 3-point perspective:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembre que mesmo quando usávamos

2 x 2 e a forma transposta

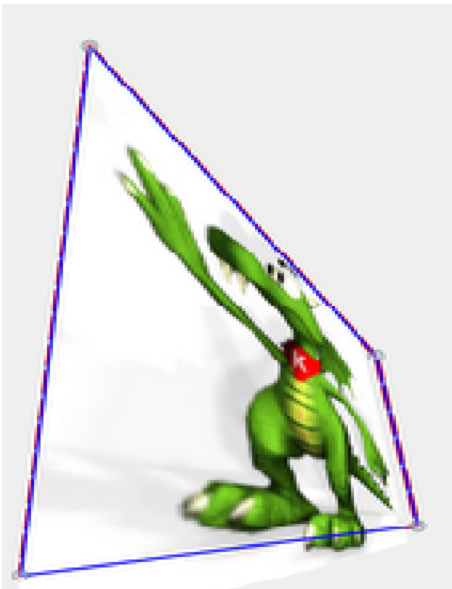
(pós multiplicando o ponto a ser transformado)

Já tínhamos visto isso?

(quando imaginávamos o que faria a parte que ainda não estávamos usando da matriz de transformação ! ! !)

Transformação Perspectiva

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\p & q & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\px+qy+1\end{pmatrix}$$



(10,10)
(100,10)
(100,100)
(10,100)

p=0,2 e q = 0,1
(x,y,1) - > (x,y,px+qy+1)

(10/4,10/4) = (2,5 ; 2,5)
(100/22,10/22)=(4,5 ; 0,5)
(100/31,100/31)= (3,2 ; 3,2)
(10/13,100/13)= (0,7 ; 7,7)

Efeito em um ponto no infinito

$$M \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

E então cadê o ponto de fuga? !

Pontos de Fuga (vanishing points)

- Um ponto no infinito pode ser levado em um ponto P_0 .
- Família de retas paralelas que se intersectam no infinito são transformadas numa família de retas incidentes em P_0.
  - P_0 é chamado de **ponto de fuga**.
  - Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos usados.
    - Eles são a imagens de pontos no infinito paralelos a esses eixos $[x, 0, 0, 0]$ ou $[0, y, 0, 0]$ ou $[0, 0, z, 0]$.

Ponto de Fuga na direção z

Sempre que aplicarmos matrizes de perspectivas quaisquer (com 1, 2, ou 3 centros de projeção) uma família de retas **originalmente paralelas** vão parecer na vista em perspectiva que se intersectam em (1, 2, ou 3) **pontos de fuga**.

Vamos ver quem é esse Ponto de fuga e qual sua correspondência com o centros de projeção.

Para isso vamos ver para onde o **eixo z** será projetado pela matriz de perspectiva

$$[M_{\mathrm{PER}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-1}{z_{\mathrm{cp}}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

perspective transformation

(um ponto qualquer sobre o eixo z seria : algo como (0,0 1,1) ou mais genericamente (0, 0, z, 1) , com z tão grande quanto se queira!

Ou mesmo (0, 0, 1, 0) ou (0, 0, z, 0) !

desde que não seja o centro de projeção
(0 , 0 , z_{cp} 1)

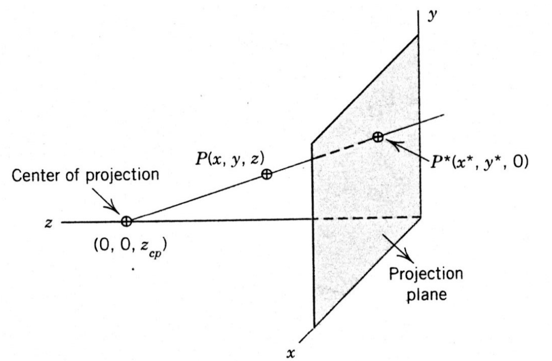
Ponto de Fuga na direção z

Repare que (0, 0, 1, 0) equivale a um ponto no infinito na direção z
E esse ponto será projetado em: (0, 0, - z_{cp} , 1)

(com uma simplificação na notação!)

$$[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad t] = [0 \quad 0 \quad 1/t \quad 1]$$

E esse é o ponto de fuga para o centro de projeção sobre o eixo z : (0, 0, - z_{cp} , 1) (como que espelhado pelo plano de projeção!)



Para o caso de 2 centros de projeção nas

direções x e y :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1, 0, 0, 0) equivale a um ponto no infinito na direção x
e
(0, 1, 0, 0) equivale a um ponto no infinito na direção y

esses pontos serão projetado em: (1, 0, 0, r) e ***(0, 1, 0, s)*** :
(1/r, 0, 0, 1) e ***(0, 1/s, 0, 1)***

ou seja para centro de projeção em (x_{cp}, 0, 0, 1) e projeção no plano x=0 ,
o ponto de fuga do eixo x : (- x_{cp}, 0, 0, 1)

e para centro de projeção em (0, y_{cp}, 0, 1) e projeção no plano y=0

o ponto de fuga do eixo y : (0, - y_{cp} , 0, 1)

Para o caso de 3 centros de projeção,
cada um nas direções de um dos eixos, teremos 3 pontos de fuga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x axis: $[1/r \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

y axis: $[0 \quad 1/s \quad 0 \quad 1]$

z axis: $[0 \quad 0 \quad 1/t \quad 1]$

$(-x_{cp}, 0, 0, 1)$,

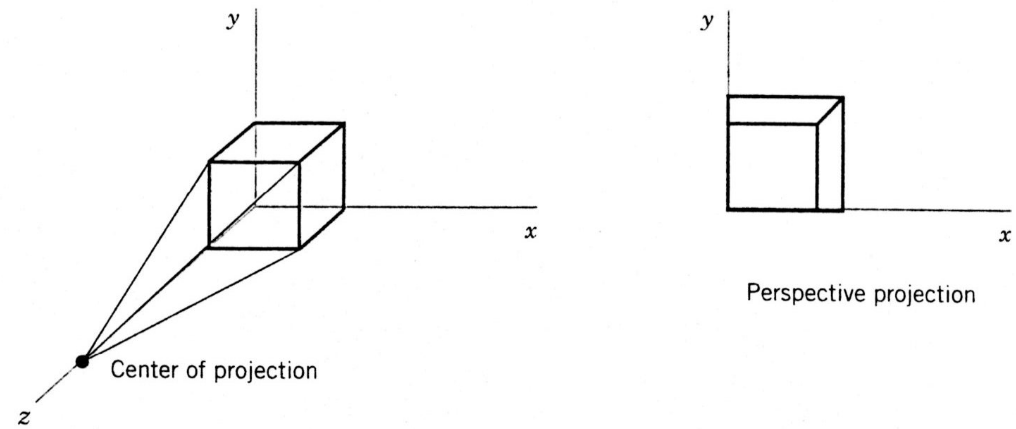
$(0, -y_{cp}, 0, 1)$

e

$(0, 0, -z_{cp}, 1)$

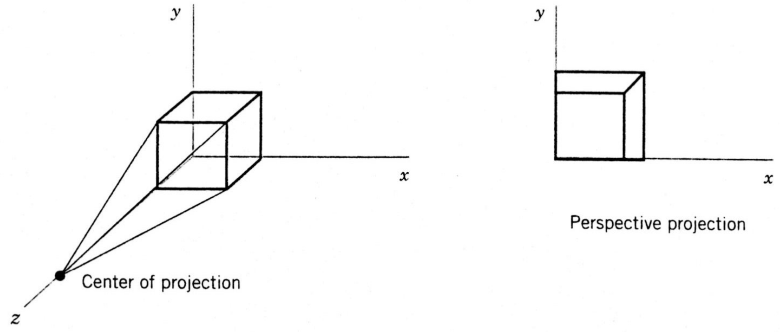
Implementar Transformações Gerais Com um Único Ponto de Fuga

- Usando as transformações perspectivas obtidas até aqui o resultado sem sempre se tem o resultado desejado ou o mais apropriado :



  - fazendo translações e rotações e depois transformação perspectiva temos aparências mais adequadas muitas vezes.

Exemplificando 1



Imagine que tenhamos um cubo
com o plano mais afastado em z= 0 .

Usando as transformações perspectivas com centro no eixo z o resultado nem pareceria um cubo !!!

Mas poderíamos girar em torno do *eixo y*, transladá-lo de *y=m, z=n* e ai então aplicar a matriz de perspectiva em um ponto.

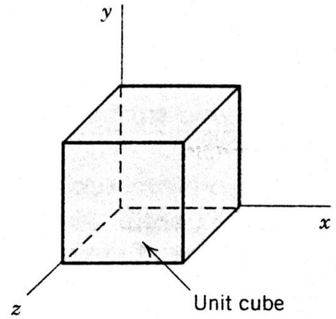
$$[T_R]_y^\theta \, [T_{TR}]_{(0,m,n)} [M_{PER}]$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \dfrac{\sin\theta}{z_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \dfrac{-\cos\theta}{z_{cp}} \\ 0 & m & 0 & \left(1 - \dfrac{n}{z_{cp}}\right) \end{bmatrix}$$

teremos 2 pontos de fuga !!!

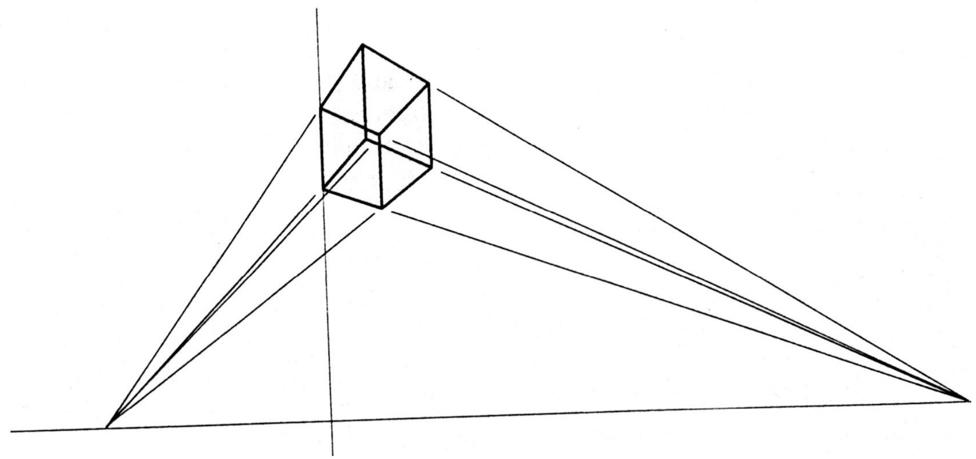
Exemplificando 1



Imagine que tenhamos um cubo
Unitário .

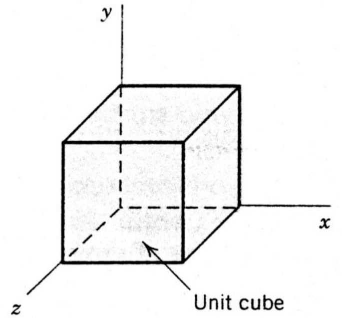
Como ficaria ele projetado depois de girar de 30° em torno do eixo *y*, transladado de *y= 3, z= -3* e em perspectiva com centro de projeção em (0,0,2) .

$$[T_R]_y^{\theta}\,[T_{TR}]_{(0,m,n)}[M_{PER}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \dfrac{\sin\theta}{z_{cp}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \dfrac{-\cos\theta}{z_{cp}} \\ 0 & m & 0 & \left(1-\dfrac{n}{z_{cp}}\right) \end{bmatrix}$$



teremos 2 pontos de fuga !!!

Exemplificando 2



Imagine que o cubo unitário .

Seja rotacionado em torno do eixo *y*, e x e depois modificado pela perspectiva com centro de projeção no eixo z .

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-1}{z_{cp}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\sin\phi & 0 & \sin\theta\cos\phi/z_{cp} \\ 0 & \cos\phi & 0 & -\sin\phi/z_{cp} \\ \sin\theta & -\cos\theta\sin\phi & 0 & -\cos\theta\cos\phi/z_{cp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

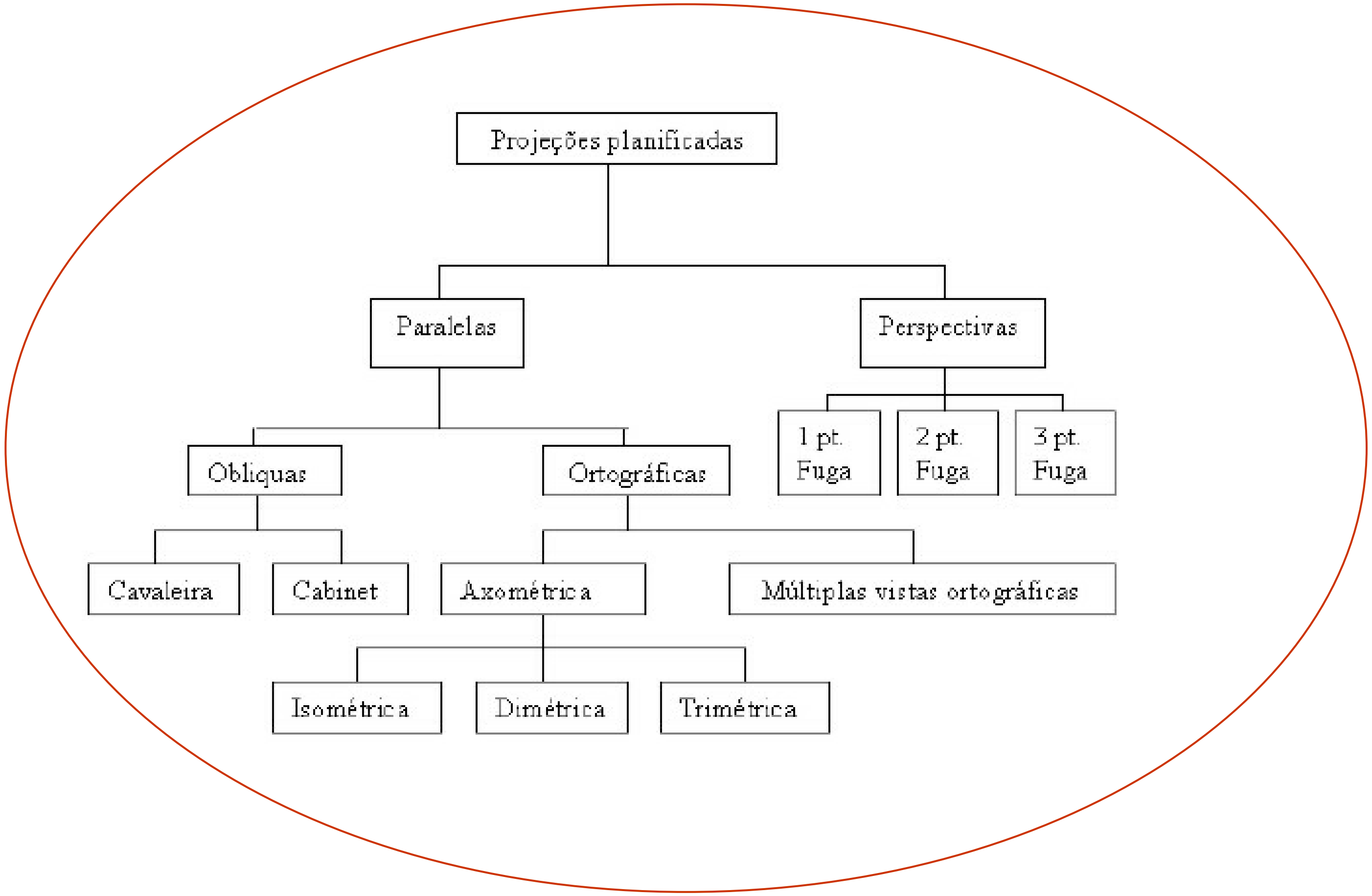
Defina alguns valores e veja que teremos
3 pontos de fuga !!!

Implementar Transformações Gerais Com um Único Ponto de Fuga

Transformações perspectivas com 2 pontos de fuga podem ser obtidas por combinação de:

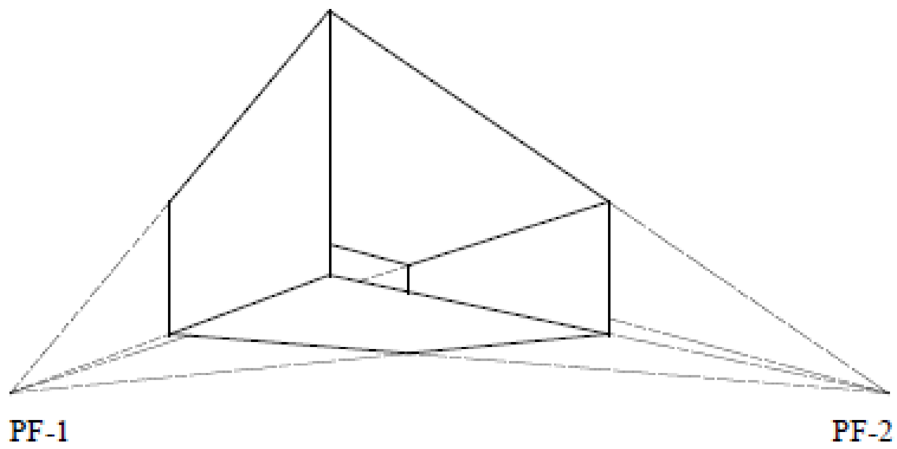
- rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
- transformação perspectiva com um único ponto de fuga.

Com 2 rotações (em eixo que não contém o centro de projeção) , obtêm-se transformações com 3 pontos de fuga.


Projeções planificadas
Paralelas
Perspectivas
Obliquas
Ortográficas
1 pt. Fuga
2 pt. Fuga
3 pt. Fuga
Cavaleira
Cabinet
Axométrica
Múltiplas vistas ortográficas
Isométrica
Dimétrica
Trimétrica

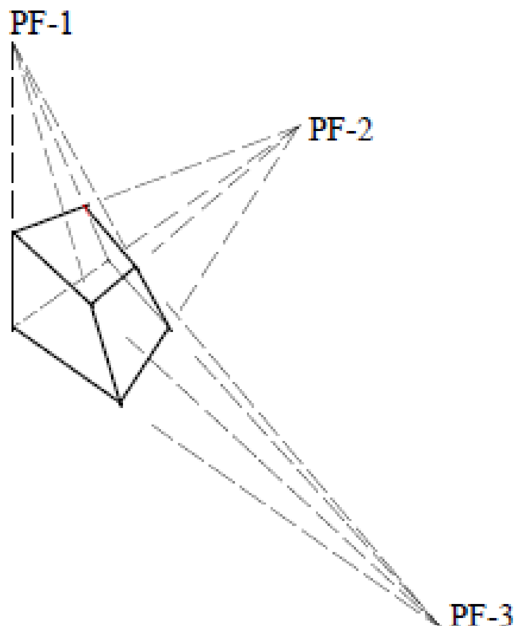
Resumindo: Pontos de fuga principais

- Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



3 pontos de fuga

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva M do R^3 é uma transformação linear do R^4.
- A matriz 4 x 4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto P do espaço é levado para o plano $w = r\,z + 1$
- Se $z = -1/r$, então P é levado em um ponto no infinito.
- Pontos com $z = 0$ não são afetados.

$$M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto ideal, correspondendo a direção z, tem coordenadas $[0, 0, 1/r, 1]$
  - Este é o ponto de fuga principal da direção z.
  - Semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:

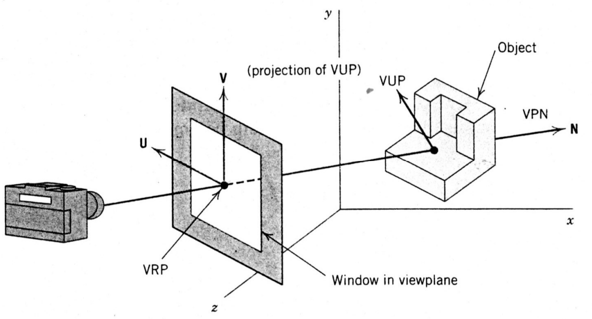
  $[-1/p, 0, 0, 1]$

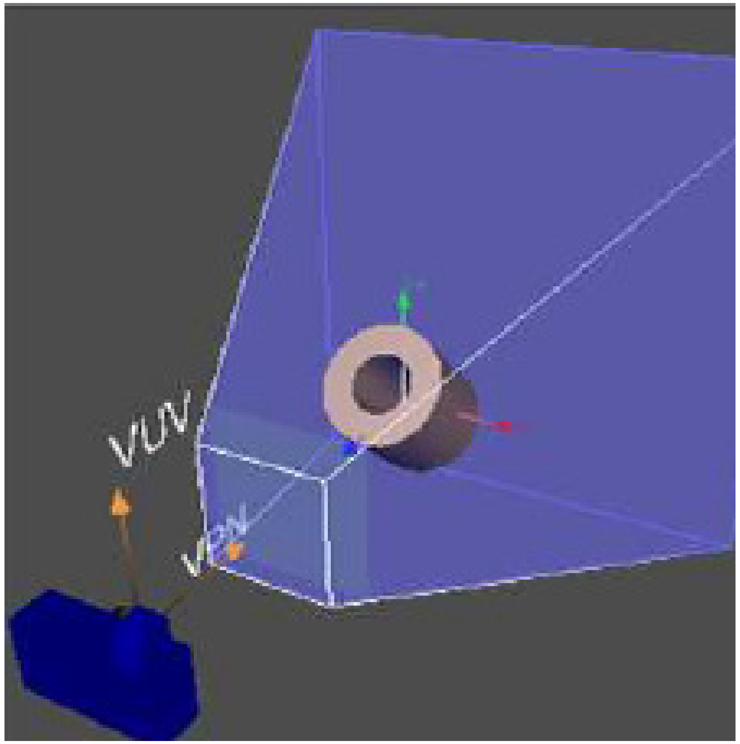
  $[0, -1/q, 0, 1]$

  $[0, 0, -1/r, 1]$

- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de rotações e transformação perspectiva, com um único ponto de fuga.

Projetar acarreta perder informação por isso mantemos sempre nossa estrutura de dados original dos objetos





Bibliografia:

D. F. Rogers, J. A. Adams. Mathematical Elements for Computer Graphics, 2dn Ed. , Mc Graw Hill, 1990

E. Azevedo, A. Conci, Computação Gráfica: teoria e prática, Campus ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley,A.van Dam,S.K.Feiner,J.F.Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, Reading, 1990.

Y. Gardan. Numerical Methods for CAD , MIT press, Cambridge, 1985.